FIBRÉS HOLOMORPHES SUR UN TORE COMPLEXE

YOZÔ MATSUSHIMA

1. Introduction

Le problème de classifier les fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe M a été résolu récemment dans les deux cas suivants: 1) M est la sphère de Riemann (Grothendieck [4]), 2) M est une courbe elliptique (Atiyah [2]). Mais si la dimension complexe de M est >1, nous ne connaissons presque rien de ce problème, sauf le cas où la dimension complexe de fibre est égale à 1.

Nous nous proposons ici d'étudier quelques propriétés des fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe qui possèdent une connexion holomorphe. Nos résultats nous conduirons à la classification de tels fibrés dans le cas où la dimension complexe de fibre est égale à 2 (Théorème 4): Il y a une correspondance biunivoque bien déterminée entre les classes de tels fibrés indécomposables et la variété $T'^n \times P^{n-1}$, où T'^n désigne la variété de Picard de la base (la base étant un tore complexe de dimension complexe n) et où P^{n-1} désigne l'espace projectif complexe de dimension complexe $n-1$. Notons ici que la condition qu'un fibré vectoriel holomorphe possède une connexion holomorphe est équivalente, 1) si la base est de dimension complexe 1, à la condition que ce fibré se définit par une représentation du groupe fondamental de la base et, 2) si la base est une variété kaehlerienne compacte et si la dimension de fibré est égale à 1, à la condition que sa classe de Chern est nulle.

Notre méthode est essentiellement différente de celle de Atiyah [2]. Il y a de difficultés d'étendre la méthode de Atiyah dans le cas où la base est un tore complexe de dimension complexe >1. La base de notre étude est le théorème 1 qui dit: Un fibré principal holomorphe sur un tore complexe pos-

Received August 8, 1958.