N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 83 (1981), 5–14

SUR L'INÉGALITÉ FONDAMENTALE DE H. CARTAN POUR LES SYSTÈMES DE FONCTIONS ENTIÈRES

NOBUSHIGE TODA

§1. Introduction

Soit $f = (f_0, f_1, \cdots, f_n)$ $(n \geqq 1)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$; c'est-à-dire, les fonctions $f_0, f_1, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de f définie par Cartan ([1]):

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{0\leq j\leq n} \log|f_j(re^{i\theta})|\, d\theta - \max_{0\leq j\leq n} \log|f_j(0)|\,.$$

Soient X un ensemble de combinaisons $(\not\equiv 0)$ linéaires, homogènes à coefficients constants de $f_0, f_1, \cdots, f_n$ et linéairement distinctes $n+1$ à $n+1$ et λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes qui existent entre les $f_0, f_1, \cdots, f_n$. On note que $0 \leqq \lambda \leqq n-1$.

Il y a longtemps que Cartan ([1]) a démontré l'inégalité fondamentale suivante quand $\lambda = 0$:

Théorème de Cartan. Pour q combinaisons $F_1, \cdots, F_q$ $(q \geqq n+2)$ quelconque dans X,

$$(q-n-1)T(r,f) < \sum_{i=1}^{q} N_n(r, 0, F_i) + S(r)$$

où $N_n(r, 0, F_i)$ désigne la fonction $N_n(r, F_i)$ dans [1] et

$$S(r) = O(\log r) + O(\log T(r,f)) \qquad (r \notin E)\,,$$

E étant un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Et puis il a espéré démontrer l'inégalité suivante quand $\lambda > 0$ (originairement pour les fonctions algébroïdes ([1])):

Received June 30, 1978.