# ÜBER DEN QUASINORMALTEILER DER REGULÄREN $p$-GRUPPE VON DER KLASSE 2

KIRIO NAKAMURA

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, was für eine Struktur eine Untergruppe $\mathfrak{N}$ von endlicher $p$-Gruppe $\mathfrak{G}$ habe, wenn $\mathfrak{N}$ mit jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$ als ganzes vertauschbar ist. In diesen $\mathfrak{N}$ tritt natürlich ein nicht nur aus $E$ bestehender Normalteiler von $\mathfrak{G}$ auf und er enthält ein Zentrumselement von der Ordnung $p$. Wir fragen: Gilt das Ähnliche auch, falls $\mathfrak{N}$ kein Normalteiler ist? Die gestellte Frage läßt sich für regülare $\mathfrak{G}$ beantworten, deren Klasse 2 ist, aber für andere bleibt sie noch offen. Bevor wir diese Frage untersuchen, stellen wir einige Definitionen und nötige Sätze und Hilfssätze zusammen.

### 1. Bezeichnungen

Im folgenden bedeuten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, . . . eine Gruppe von endlicher Ordnung $|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|$, . . . und $A$, $B$, . . . ihre Elemente mit der Ordnung $|A|$, $|B|$, . . . Das Erzeugnis von $A$, $B$, . . . bezeichnen wir mit $\{A, B, \ldots\}$. Das Zentrum oder die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}$ oder $\mathfrak{G}'$. Ist $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als ganzes vertauschbar, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}\mathrm{v}\mathfrak{B}$ und das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist bekanntlich eine Gruppe. Ist $\mathfrak{N}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}$ für ein festes $\mathfrak{N}$ und für ein beliebiges $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{G}$, so heißt $\mathfrak{N}$ quasi-normal in $\mathfrak{G}$ oder ein Quasinormalteiler von $\mathfrak{G}$ und schreiben wir $\mathfrak{G}\underline{\mathfrak{D}}\mathfrak{N}$. Wir betrachten allerdings $\mathfrak{N}$ für $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ lauter. Gelte ebenso für ein festes $N\in\mathfrak{G}$ mit $|N| = p$ und ein beliebiges $G\in\mathfrak{G}$ $[N, G] = G^{p^{g-1}}$ oder $E$, dann nennen wir $N$ ein Kernelement von $\mathfrak{G}$ und bezeichnen mit $N\in \mathfrak{K}_p$. Dabei sei $N\overline{\in}\mathfrak{Z}$ und für $g = 1$ $[N, G] = E$. Dagegen bezeichnen wir mit $N\in\mathfrak{Z}_p$, falls $|N| = p$ und $N\in\mathfrak{Z}$ ist. Ist $\mathfrak{G}$ regülär (im Sinne von P. Hall s. Satz (A) in 1) und $|G|\leqq p^a$, bilden $G$ und $E$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die wir mit $\Omega_a(\mathfrak{G})$ schreiben. In 3 sind alle betrachteten Gruppen $p$-Gruppe von der Klasse 2 für $p>2$ und wir schreiben $|A| = p^a$, $|B| = p^b$, . . . für jedes $A$, $B$, . . . $\in\mathfrak{G}$, außer wenn wir besonders angeben werden.

Received June 4, 1965.