ESPACES HOMOGÈNES DE STEIN DES GROUPES DE LIE COMPLEXES

YOZÔ MATSUSHIMA

Introduction

A. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K respectivement. $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre réelle de l'algèbre complexe $\mathfrak{g}$. Soit $\tilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$ $(i^2 = -1)$. Alors $\tilde{\mathfrak{k}}$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}$. Soit $\tilde{K}$ le sous-groupe de Lie complexe et connexe de G correspondant à $\tilde{\mathfrak{k}}$. Dans cet article nous démontrerons d'abord le théorème suivant qui est un analogue analytique du théorème de Cartan-Malcev-Iwasawa (cf. [8]).

THÉORÈME 1. *La variété d'un groupe de Lie complexe et connexe G est holomorphiquement homéomorphe à la variété $C^l \times \tilde{K}$, C^l désignant l'espace numérique complexe de dimension complexe l.*

Un groupe de Lie complexe G sera dit un *groupe de Stein,* si la variété de G est une variété de Stein. Dans le mémoire [10] nous avons donné une condition algébrique pour qu'un groupe de Lie complexe et connexe soit un groupe de Stein. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G. G est de Stein si et seulement si $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$, $\mathfrak{k}$ désignant la sous-algèbre réelle de l'algèbre de Lie complexe de G correspondant à K (voir [10], Théorème 1). Alors le sous-groupe $\tilde{K}$ de G défini ci-dessus est le complexifié de K. (Nous dirons qu'un groupe de Lie complexe et connexe H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal L de H, si l'on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + i \cdot \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l} \cap i \cdot \mathfrak{l} = (0)$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{l}$ désignant les algèbres de Lie de H et L respectivement.) D'après des résultats de Chevalley, la variété d'un groupe de Lie complexe et connexe qui est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal est une variété algébrique affine complexe (voir [2], Chapitre VI et l'appendice de cet article). Il résulte de là et du théorème 1 le théorème suivant.

Received January 30, 1960.