# ÜBER DIE ORDNUNG GEWISSER UNTERGRUPPEN VON $GL(q, p)$

KIRIO NAKAMURA

Es ist wohlbekannt (Burnside [1]), dass $(S_{p_1}(GL(m, p)) < p^m$ für ein beliebiges $m$ und für eine von $p(\neq 2)$ verschiedene ungerade Primzahl $p_1$.

In den folgenden Zeilen beweisen wir die Ungleichung

$$(1) \qquad (\mathfrak{M}) < p^q \qquad (p \neq 2,\ q \neq p).$$

für eine irreduzible nilpotente Untergruppe $\mathfrak{M}$ von $GL(q, p)$ (v.d. Waerden [2]) mit einer ungeraden und $p$-regulären Ordnung $(\mathfrak{M})$ und für eine von $p$ verschiedene Primzahl $q$.

Beweis von (1). Es sei $\mathfrak{N}$ eine abelsche Gruppe von der Ordnung $p^q$ und vom Typus $(p, \ldots, p)$. Wir konstruieren das Holomorph $\mathfrak{G}$ der Automorphismengruppe $\mathfrak{M}$ über $\mathfrak{N}$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wir führen einen Widerspruch unter der Annahme,

$$(2) \qquad (\mathfrak{M}) > (\mathfrak{N}).$$

Sei $\mathfrak{M}'$ eine von $\mathfrak{M}$ verschiedene Konjugierte von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}$ und sei $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1$. Wäre $\mathfrak{M}_1 = 1$, so wäre $(\mathfrak{G}) \geqq (\mathfrak{M})^2 > (\mathfrak{M})(\mathfrak{N}) = (\mathfrak{G})$, was unmöglich ist. Also muss $\mathfrak{M}_1 \neq 1$ sein. Sei $S_{p_1}(\mathfrak{M}_1)$ die $p_1$-Sylowgruppe von $\mathfrak{M}_1$, wobei $p_1$ ein Primfaktor von $(\mathfrak{M}_1)$ ist. Sei $Z_{\mathfrak{G}}(S_{p_1}(\mathfrak{M}_1))$ der Zentralisator von $S_{p_1}(\mathfrak{M}_1)$ in $\mathfrak{G}$, dann enthält er das $p_1$-Sylowkomplement $\mathfrak{M}^{p_1}$ in $\mathfrak{M}$, also auch $\mathfrak{M}'^{p_1}$. Wäre $\mathfrak{M}^{p_1} = \mathfrak{M}'^{p_1}$, dann würden $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ beide im Zentralisator vom Zentrum von $\mathfrak{M}^{p_1}$ in $\mathfrak{G}$ enthalten sein. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{M}$ stimmte der Zentralisator dann mit $\mathfrak{G}$ überein, was ein Widerspruch ist. Also ist $\mathfrak{M}^{p_1} \neq \mathfrak{M}'^{p_1}$. Daher enthält $Z_{\mathfrak{G}}(S_{p_1}(\mathfrak{M}_1))$ eine Untergruppe $\mathfrak{N}_1 \neq 1$ von $\mathfrak{N}$ als Normalteiler, weil $\mathfrak{M}^{p_1}$ also auch $\mathfrak{M}'^{p_1}$ in $Z_{\mathfrak{G}}(S_{p_1}(\mathfrak{M}_1))$ enthalten sind und $\{\mathfrak{M}^{p_1}, \mathfrak{M}'^{p_1}\} \subsetneqq \mathfrak{M}$ ist. Hier bezeichnet $\{\mathfrak{M}^{p_1}, \mathfrak{M}'^{p_1}\}$ die von $\mathfrak{M}^{p_1}$ und $\mathfrak{M}'^{p_1}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Wir dürfen annehmen, dass $\mathfrak{N}_1$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{M}^{p_1}\mathfrak{N}_1$ ist.

Received July 31, 1957.