

## SUR UNE CONJECTURE DE KRULL EN THEORIE DES VALUATIONS

P. RIBENBOIM\*

Dans cette note, nous étudions les anneaux d'intégrité primaires et complètement intégralement clos. Krull [1] a posé la question suivante : est-ce qu'un anneau d'intégrité primaire et complètement intégralement clos est nécessairement un anneau de valuation ?

Nagata [2] a répondu à cette question par la négative, en exhibant un exemple d'anneau d'intégrité primaire, complètement intégralement clos, mais non de valuation. La démonstration que l'anneau de son exemple possédait effectivement les propriétés indiquées présentait néanmoins des lacunes non triviales à remplir. Ainsi, l'auteur a dédié une note [3] à l'élucidation de ces derniers points et à l'établissement de quelques propriétés plus précises satisfaites par cet anneau.

Malgré cette réponse négative à la conjecture de Krull, on pourrait néanmoins chercher des conditions supplémentaires pour qu'un anneau d'intégrité primaire, complètement intégralement clos, soit un anneau de valuation. Ces conditions portent sur la structure de l'idéal premier unique de l'anneau et ont nature topologique.

Il est bien connu que si  $A$  est un anneau d'intégrité avec unité, ayant un seul idéal premier  $\mathfrak{p}$  non trivial qui est principal, alors  $A$  est l'anneau d'une valuation discrète. Nous remplaçons le fait que  $\mathfrak{p}$  soit principal par la condition moins forte " $\mathfrak{p}$  est la réunion d'une suite croissante d'idéaux principaux" et déterminons des conditions sur des telles suites pour assurer que  $A$  soit un anneau de valuation. Ces conditions font intervenir la notion de puissance à exposant réel d'un idéal principal, qui avait été déjà considérée dans un cas distinct par Samuel [4].

La Proposition 1 n'est rien d'autre qu'un cas particulier d'un théorème récemment obtenu par Krull [5]. La Proposition 1 est employée pour la démonstration de la Proposition 2, qui dit : soit  $A$  un anneau d'intégrité primaire,

---

Received July 1, 1955.

\* Boursier du Conselho Nacional de Pesquisas, Rio de Janeiro, Brasil.