M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 57 (1975), 121-125

DÉMONSTRATION SIMPLE DE LA REPRESENTATION INTÉGRALE DU NOYAU COMPLÈTEMENT SOUS-HARMONIQUE ET INVARIANT PAR ROTATIONS

MASAYUKI ITÔ

§ 1. Introduction

Dans toute la suite $\boldsymbol{R}^n$ désigne l'espace euclidien à dimension n ($\geqq 1$). On désigne par $\varDelta$ l'opérateur de Laplace sur $\boldsymbol{R}^n$. Dans la théorie du potentiel, un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ signifie une mesure de Radon positive dans $\boldsymbol{R}^n$. Rappelons qu'un noyau de convolution de Dirichlet N sur $\boldsymbol{R}^n$ est un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ tel que $1/\hat{N}$ soit égal à une fonction définie-négative dans $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs réelles, où $\hat{N}$ désigne la transformée de Fourier de N (cf. [1]). Pour un nombre $p > 0$, G_p désigne le noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant $(\varDelta - p)G_p = -\varepsilon$ (au sens des distributions), où ε est la mesure de Dirac à l'origine. Si $n \geqq 3$, on note $G = G_0$ le noyau newtonien avec $\varDelta G = -\varepsilon$. Dans l'article précédent [2], on a montré le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini*[1] *et invariant par rotations. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *N est complètement sous-harmonique (en dehors de l'origine); c'est-à-dire, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\varDelta^m N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine, où $\varDelta^0 N = N$, $\varDelta^1 = \varDelta$ et $\varDelta^m = \varDelta^{m-1}\varDelta$ ($\forall m \geqq 2$).*

(2) *N est de la forme*

$$N = c\varepsilon + \int G_p d\nu(p) ,$$

où c et ν sont respectivement une constante $\geqq 0$ et une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+ = \{t \in \boldsymbol{R}^1 ; t \geqq 0\}$.

Received April 17, 1974.

1) Cela signifie que, quelle que soit f une fonction finie et continue dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact, $\lim_{x\to\infty} N*f(x)=0$.