C. Maire
Nagoya Math. J.
Vol. 150 (1998), 1–11

UN RAFFINEMENT DU THÉORÈME DE GOLOD-SAFAREVIC

CHRISTIAN MAIRE

Abstract. Soient k un corps de nombres, p un nombre premier, et L la p-tour de Hilbert de k; $G = \mathrm{Gal}(L/k)$. Dans ce papier, on se propose de donner un raffinement du critère de Golod-Safarevic appliqué à G, construit en filtrant le groupe de nombres $\Lambda = \{x \in k^\times/(x) = \mathcal{Q}^p\}$. Ce raffinement permettra alors de montrer qu'un corps quadratique réel dont le groupe des classes contient un sous-groupe de la forme $(4, 4, 4, 4)$, possède une 2-tour de Hilbert infinie.

§1. Introduction

Soient k un corps de nombres et p un nombre premier. Notons par L la p-extension maximale de k, non-ramifiée pour les places finies et totalement décomposée pour les places infinies; on dit que L est la p-tour de Hilbert de k; soit G le groupe de Galois de L/k. Un problème classique est d'étudier la finitude ou non de G.

Le premier critère de non-finitude fut donné en 1964 par Golod-Safarevic [1]; il permet par exemple de montrer que dès que le 2-rang du groupe des classes d'un corps quadratique réel k est supérieur ou égal à six, alors k a une 2-tour de Hilbert infinie. Ce critère est une conséquence d'un résultat de théorie des p-groupes finis; plus précisémment, Golod et Safarevic ont montré que si un p-groupe G est fini, alors on a l'inégalité

$$r > d^2/4, \tag{1}$$

où d est le p-rang de G, et où $r = d_p H_2(G, \mathbb{F}_p)$ est le nombre de relations de G (on rappelle que si A est un groupe, le p-rang de A, noté $d_p A$, est égal à la dimension sur $\mathbb{F}_p$ de $A/A^p[A, A]$).

Deux raffinements de (1) ont alors été donné:

Le premier en 1965 par Koch et Vinberg ([5], [7], [15]); ce résultat fait intervenir les filtrations de Zassenhaus d'une représentation de G. Il permet par exemple de montrer, pour p différent de 2, que si le p-rang du groupe

Received July 16, 1996.