JOURNAL OF
SYMPLECTIC GEOMETRY
Volume 6, Number 3, 247–266, 2008

HYPERSURFACES SYMPLECTIQUES RÉELLES ET PINCEAUX DE LEFSCHETZ RÉELS

Damien Gayet

In a compact symplectic real manifold, i.e., supporting an antisymplectic involution, we use Donaldson's construction to build a codimension 2 symplectic submanifold invariant under the action of the involution. If the real part of the manifold is not empty, and if the symplectic form ω is entire, then there is an integer N such that for all k big enough, we can find a hypersurface Poincaré dual of $Nk[\omega]$ such that its real part has at least $k^{n/2}$ connected components, up to a constant independent of k, and where $2n$ is the dimension of the ambient manifold. Finally we extend to our real case Donaldson's construction of Lefschetz pencils.

Dans le cadre d'une variété symplectique compacte X^{2n} réelle, c'est-à-dire possédant une involution antisymplectique, nous utilisons la construction de Donaldson pour établir l'existence de sous-variétés symplectiques de codimension 2 invariantes par l'involution. Si la partie réelle de la variété est non vide, et si la forme symplectique ω est entière, alors il existe un entier N tel que pour tout degré k assez grand, il existe une hypersurface Poincaré duale à $Nk[\omega]$, telle que sa partie réelle possède au moins $k^{n/2}$ composantes connexes, à une constante indépendante de k près, et où $2n$ est la dimension de la variété ambiante. Enfin nous étendons au cas réel les résultats de Donaldson sur l'existence de pinceaux de Lefschetz.

1. Introduction

Soit (X^{2n}, ω) une variété symplectique compacte, et supposons qu'il existe un fibré en droites complexes L de classe de Chern $[\omega]$, ce qui revient à dire que les périodes de $[\omega]$ sont entières. Fixons de plus une structure presque complexe J compatible avec ω. Dans [**1**], S.K Donaldson montre qu'il existe une suite de sections $(s_k)_k$ de L^k approximativement J-holomorphe (en abrégé AH), c'est-à-dire dont le $\bar{\partial}$ est majorée par une constante indépendante de k, et dont la dérivée covariante est minorée aux