Quotients Homophones des Groupes Libres
Homophonic Quotients of Free Groups

Jean-François Mestre, René Schoof, Lawrence Washington, Don Zagier

Ah, la recherche! Du temps perdu.

Soit G le quotient du groupe libre à 26 générateurs $a, b, c, \ldots, z$ par les relations $A = B$, pour tout couple de mots (A, B) pouvant avoir la même prononciation en anglais. (Un groupe défini d'une manière analogue a été considéré dans [Landsburg 1986].) Notre but est de déterminer la structure du groupe G.

Théorème. *G est trivial.*

Démonstration. (Nous nous servirons sans le mentionner des faits contenus dans [Stein 1973].) La relation homophone $bye = by$ implique que e est trivial dans G (en symboles : $e = e$), après quoi les identités

$$lead = led, \quad maid = made, \quad sow = sew,$$
$$buy = by, \quad sow = so, \quad lye = lie$$

nous donnent la trivialité des autres voyelles et demivoyelles a, i, o, u, w et y. La trivialité des générateurs h, k, n, p et b est une conséquence des formules

$$hour = our, \quad knight = night, \quad damn = dam,$$
$$psalter = salter, \quad plumb = plum,$$

tandis que celle des générateurs s, t, l, r et m se déduit des égalités

$$bass = base, \quad butt = but, \quad tolled = told,$$
$$barred = bard, \quad dammed = damned$$

(méthode des idempotents). Pour les générateurs

Let G be the quotient of the free group on 26 letters $a, b, c, \ldots, z$ by the relations $A = B$ whenever A and B are words having the same pronunciation in French. (A similarly defined group was considered in [Landsburg 1986].) The object of this paper is to determine the structure of G.

Theorem. *G is trivial.*

Proof. (We use without special mention facts that can be found in [Robert 1973].) The relation

$$soie = soi$$

shows, on canceling *soi* (reflexive property!), that e is trivial in G (in symbols, $e = e$). A similar argument applied to the final letters of *soit*, *sois* and *aux* shows that t, s and x are also trivial. The triviality of r follows from the well-known fact

$$serre = sert$$

[Lam 1978], and that of c, l, d, h and n from

$$ce = se, \quad balle = bal, \quad laid = lait,$$
$$haut = au, \quad parlent = parle,$$

after which the relations

$$allez = aller, \quad sept = cet,$$
$$champs = chant, \quad fard = phare$$

allow one to eliminate z, p, m and f. (One could give a proof with a more topological flavor of the triviality of f using *cerf* = *serre*.) The triviality

1058-6458/96 \$0.50 per page