Commun. Math. Phys. 151, 275–302 (1993)

Communications in Mathematical Physics

Le Langage des Espaces et des Groupes Quantiques

Georges Maltsiniotis

UFR de Mathématiques, Université de Paris VII, Tours 45-55 5ème étage, 2, Place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France

Received March 3, 1992; in revised form June 5, 1992

Abstract. We study the foundations of the differential calculus in quantum geometry. The notions of (differential) quantum space and cone are introduced. Generalizing a construction of Manin, to a quantum cone we associate the quantum group of its "linear automorphisms preserving the differentials" and deduce a de Rham complex on this group. We give examples of differential calculi on quantum hyperplanes and quantum linear groups.

Introduction

Le but de cet article est de présenter une étude systématique d'un calcul différentiel non commutatif, dans le cadre des espaces et des groupes quantiques. Dans l'esprit du livre de Yu. I. Manin, *"Quantum groups and non-commutative geometry,"* un espace quantique est une "variété algébrique" en "géométrie algébrique non commutative." Par analogie à la géométrie commutative ordinaire, on est tenté d'identifier les "K-espaces quantiques affines," où K désigne un corps commutatif (ou plus généralement un anneau commutatif), aux objets de la catégorie opposée à celle des K-algèbres associatives, unifères, non nécessairement commutatives. Néanmoins, si en géométrie algébrique commutative, la donnée de l'anneau structural d'un schéma affine définit canoniquement une "structure différentielle" sur ce schéma, il n'en est pas de même dans le cas non commutatif. Plus précisement, si A est une K-algèbre commutative, et si l'on désigne par $\mu: A \otimes A \longrightarrow A$ l'application K-linéaire définissant la multiplication de A, le noyau I de μ est un idéal de $A \otimes A$, l'application K-linéaire $d: A \longrightarrow I/I^2$, définie par $d(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$, est une dérivation et toute dérivation de A à valeurs dans un A-module se factorise de façon unique à travers d. Il existe un prolongement unique de d en une antidérivation K-linéaire, de carré nul, de l'algèbre extérieure $\wedge_A(I/I^2)$, qui fait de cette algèbre un complexe différentiel gradué, appelé *complexe de de Rham algébrique*. On peut considérer que c'est ce complexe qui définit la "structure différentielle" du schéma $\mathrm{Spec}(A)$. Si l'algèbre A n'est pas commutative, cette construction ne se généralise pas. En effet, alors I n'est plus un idéal de $A \otimes A$,