Commun. Math. Phys. 169, 373–384 (1995)

Communications in Mathematical Physics

La Première Valeur Propre de l'Opérateur de Dirac sur les Variétés Kählériennes Compactes

Andrei Moroianu
Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

Received: 1 March 1994

Abstract: K.D. Kirchberg [Ki1] gave a lower bound for the first eigenvalue of the Dirac operator on a spin compact Kähler manifold M of odd complex dimension with positive scalar curvature. We prove that manifolds of real dimension $8l+6$ satisfying the limiting case are twistor space (cf. [Sa]) of quaternionic Kähler manifold with positive scalar curvature and that the only manifold of real dimension $8l+2$ satisfying the limiting case is the complex projective space $\mathbf{C}P^{4l+1}$.

1. Introduction

En 1980, T. Friedrich ([Fr]) a montré à l'aide de la formule de Lichnerowicz et en utilisant une modification de la connexion de Levi–Civita, que sur une variété riemannienne spinorielle compacte (M^n, g), toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac satisfait

$$\lambda^2 \geqq \frac{n}{4(n-1)} \inf_M S\,, \tag{1}$$

où S est la courbure scalaire de M. En 1984, O. Hijazi ([Hi1]) a montré que l'égalité ne peut être atteinte en (1) si M est kählérienne. Le cas kählérien a été considéré par Kirchberg ([Ki1]) qui a montré que toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac sur une variété kählérienne spinorielle compacte (M^{2m}, g) satisfait

$$\lambda^2 \geqq \frac{m+1}{4m} \inf_M S, \quad \text{si } m \text{ est impair}\,, \tag{2}$$

et

$$\lambda^2 \geqq \frac{m}{4(m-1)} \inf_M S, \quad \text{si } m \text{ est pair}\,. \tag{3}$$

Pour simplifier, on appellera *une variété-limite* une variété kählérienne spinorielle compacte (M^{2m}, g, J) de dimension complexe impaire, pour laquelle l'égalité dans (2) est satisfaite.

Le cas d'égalité dans (3) a été analisé par Lichnerowicz [Li], qui a montré que le problème se réduit au cas de la dimension complexe impaire.