Commun. Math. Phys. 156, 169–177 (1993)

Communications in
Mathematical
Physics

Densité des vecteurs propres généralisés d'une classe d'opérateurs compacts non auto-adjoints et applications

Marie Thérèse Aimar[1], **Abdelkader Intissar**[2] **et Jean Martin Paoli**[2]

[1] Département de Mathématiques, Université de Provence, Place V. Hugo, F-13331 Marseille Cedex 3, France
[2] Département de Mathématiques, Université de Corte, Quartier Grossetti, F-20250 Corte, France

Received September 7, 1992; in revised form December 21, 1992

Abstract. We consider a closed densely defined linear operator T in a Hilbert space E, and assume the existence of $\xi_0 \in \varrho(T)$ such that $K = (T - \xi_0 I)^{-1}$ is compact and the existence of $p > 0$ such that $s_n(K) = \mathbf{o}((n^{-1/p}))$, where $s_n(K)$ denotes the sequence of non-zero eigenvalues of the compact hermitian operator $\sqrt{K^*K}$. In this work, sufficient conditions (announced in [1]) are introduced to assure that the closed subspace of E spanned by the generalized eigenvectors of T coincides with E. These conditions are in particular verified by a family of non-self-adjoint operators arising in reggeon's field theory.

1. Introduction

Soit T un opérateur linéaire fermé de domaine $D(T)$ dense dans un espace de Hilbert E muni d'un produit scalaire noté $\langle\, ,\, \rangle$. On suppose que T est un opérateur à résolvante compacte et on désigne par $\varrho(T)$ son ensemble résolvant, alors son spectre $\sigma(T) = \mathbb{C} - \varrho(T)$ est discret, formé uniquement de valeurs propres et composé d'une suite de nombres complexes $\{\lambda_i\}$ $i = 1, 2, \ldots$ qu'on ordonne en général de façon croissante tels que $\lim |\lambda_i| = +\infty$ lorsque $i \to +\infty$.

Rappel de quelques propriétés classiques [4] *ou* [12]. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, si on pose:
– $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)^k = \{\varphi \in D(T^k);\ (\lambda I - T)^k \varphi = 0\}$
et $\mathrm{Im}(\lambda I - T)^k = \{(\lambda I - T)^k \varphi;\ \varphi \in D(T^k)\}$
– $\mathrm{Ker}(\lambda I - T^*)^k = \{\varphi \in D(T^{*k});\ (\lambda I - T^*)^k \varphi = 0\}$
et $\mathrm{Im}(\lambda I - T^*)^k = \{(\lambda I - T^*)^k \varphi;\ \varphi \in D(T^{*k})\}$,

alors on a:
1) Les sous espaces $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)^k$ et $\mathrm{Im}(\lambda I - T)^k$ sont invariants par rapport à T.
2) $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)^k$ est de dimension finie et $\mathrm{Im}(\lambda I - T)^k$ est fermé.
3) Il existe un entier m tel que:
a) $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)^k \subset \mathrm{Ker}(\lambda I - T)^{k+1}$, $0 \leq k < m$ et $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)^k = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)^{k+1}$; $k \geq m$.