Commun. Math. Phys. 145, 411–423 (1992)

Communications in
Mathematical
Physics

Une nouvelle définition de l'entropie dynamique des systèmes non commutatifs

Jean-Luc Sauvageot et Jean-Paul Thouvenot

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, Tour 56, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Reçu le 1 octobre 1991

Abstract. An alternative definition of entropy for non-commutative systems, equivalent to the one by A. Connes, H. Narnhofer, and W. Thirring, is given. It is based on the concepts of conditional entropy, and stationary couplings with classical systems. It allows to prove that any quantum dynamical system with singular spectrum has zero entropy.

Introduction

Un système dynamique non commutatif $(\mathbb{A}, \theta, \varrho)$ consiste en une algèbre d'opérateurs $\mathbb{A}$ (ici, une C^*-algèbre), un automorphisme θ de $\mathbb{A}$ et un état ϱ qui est θ-invariant sur $\mathbb{A}$.

L'entropie d'un tel système a été définie par Connes et Stormer [4] dans le cas où l'état ϱ est une trace, en suivant la démarche du cas classique (commutatif). Le cas où ϱ n'est pas tracial s'avère plus complexe; la définition de l'entropie dynamique demande une procédure originale (Connes, [2] et Connes, Narnhofer et Thirring [3]), que l'on peut reformuler en termes de «mesure physique»:

La mesure des phénomène quantiques s'opère en couplant un système quantique $(\mathbb{A}, \varrho)$ avec un appareil de mesure classique, c'est à dire un espace topologique probabilisé (X, μ). Le couplage se formalise comme un état λ sur l'algèbre produit tensoriel $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ [avec $\mathbb{B} = C(X)$, l'algèbre des fonctions continues sur X], de marges respectives ϱ et μ sur $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$; le couplage λ apportera d'autant plus d'information, à travers $(\mathbb{B}, \mu)$, sur l'état du système $\mathbb{A}$ qu'il sera plus éloigné de l'état tensoriel $\varrho \otimes \mu$.

Un tel couplage étant fixé, à toute famille $(\mathbb{A}_0, \ldots, \mathbb{A}_n)$ de «sous-algèbres» de dimension finie de $\mathbb{A}$[1] et toute famille $(\mathbb{P}_0, \ldots, \mathbb{P}_n)$ de sous-algèbres de dimension

[1] Par «sous-algèbre de dimension finie,» il faut entendre plus précisément une algèbre de dimension finie et une application complètement positive γ de celle-ci dans $\mathbb{A}$, préservant l'unité. Toutes les algèbres sont supposées posséder une unité, quitte à en rajouter une