

## Spineurs, Opérateurs de Dirac et Variations de Métriques\*

Jean-Pierre Bourguignon<sup>1</sup> and Paul Gauduchon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, U.R.A. 169 du C.N.R.S., F-91128 Palaiseau Cedex, France

<sup>2</sup> Département de Mécanique, Université Paris VI, U.R.A. 766 du C.N.R.S., F-75252 Paris Cedex 05, France

Received June 21, 1991

**Abstract.** In this article a geometric process to compare spinors for different metrics is constructed. It makes possible the extension to spinor fields of a variant of the Lie derivative (called the metric Lie derivative), giving a geometric approach to a construction originally due to Yvette Kosmann. The comparison of spinor fields for two different Riemannian metrics makes the study of the variation of Dirac operators feasible. For this it is crucial to take into account the fact that the bundle in which the sections acted upon by the Dirac operators take their values is changing. We also give the formulas for the change in the eigenvalues of the Dirac operator. We conclude by giving a few cases in which an eigenvalue is stationary.

### Introduction

Le problème que nous traitons dans cet article est celui de la *dépendance des spineurs et de l'opérateur de Dirac par rapport à la métrique*. Malgré son importance tant en Physique (lorsque la Gravité, donc la métrique sur l'espace-temps, est couplée à d'autres interactions) qu'en Mathématiques (lorsqu'on veut utiliser l'opérateur de Dirac comme outil d'investigation en Géométrie Riemannienne à partir de la formule fondamentale de Lichnerowicz, cf. [16]), cette question est laissée le plus souvent de côté dans la littérature.

Cet état de fait peut éventuellement être attribué à une lecture restrictive du théorème par lequel Elie Cartan termine le chapitre "*Champs de spineurs en Géométrie riemannienne*" de [6] (et le livre lui-même) et qu'il reprend dans une note terminant la version publiée de sa Notice sur les travaux scientifiques [7]: "Les difficultés (rencontrées quand on a voulu étendre les équations de Dirac de la Relativité Restreinte à la Relativité Générale) sont insurmontables si l'on veut

---

\* Recherche soutenue par le programme européen C.E.E. G.A.D.G.E.T. SC1-0105-C