Commun. Math. Phys. 116, 193–213 (1988)

Communications in
Mathematical
Physics

Resonances en limite semiclassique et exposants de Lyapunov

C. Gérard et J. Sjöstrand

Département de Mathématiques, Université de Paris Sud, F-91405 Orsay, France

Abstract. We determine the width of resonance-free domains in the complex plane for the semiclassical Schrödinger operator $-h^2\Delta+V(x)$ when $h\to 0$, in terms of Lyapunov exponents for the associated classical flow.

0. Introduction

Soit $P=P(x,D,h)$, $D=i^{-1}h\partial_x$, un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients analytiques qui vérifie les hypothèses générales de [5, Sect. 8], permettant de définir les résonances dans un petit voisinage de zéro dans le demi-plan inférieur. Le but de ce travail est de donner sous des hypothèses convenables une minoration de $-\operatorname{Im} z$ pour toute résonance z quand $h\to 0$, en terme des propriétés du flot classique dans un voisinage de l'ensemble des trajectoires captées. L'étude des résonances crées par un point fixe (voir [9] et Briet et al. [11]) et par une trajectoire fermée hyperbolique (voir [5]) suggère que l'existence d'une bande sans résonances quand $h\to 0$ est liée à des propriétés d'hyperbolicité du flot classique. Dans ce travail nous étudions le cas plus général où l'ensemble des trajectoires captées pour le flot classique est contenu dans une varieté invariante, ayant une structure hyperbolique.

Soit $p(x,\xi)$ le symbole principal de P en tant qu'opérateur h-pseudodifférentiel. Un cas particulièrement intéressant est celui où $P=-h^2\Delta+V(x)$, $p=\xi^2+V(x)$. Dans l'appendice de [4], nous avons défini pour ε_0 assez petit, l'ensemble des trajectoires captées $K=\{\varrho\in p^{-1}([-\varepsilon_0,\varepsilon_0]);\ \exp(tH_p)(\varrho)$ ne tend pas vers l'infini quand $t\to+\infty$ ou quand $t\to-\infty\}$. Ici H_p désigne le champ hamiltonien associé à p. Pour $|t|\leqq\varepsilon_0$ on pose aussi $K_t=K\cap p^{-1}(t)$. Nous allons supposer que K_0 est contenu dans une variété symplectique localement H_p-invariante par rapport à laquelle le flot a une structure hyperbolique:

(H) Dans un voisinage ouvert Ω de K dans $T^*(\mathbb{R}^n)$, il existe une sous-variété fermée symplectique de classe C^1, Σ, qui contient K_0 et telle que H_p est tangent à Σ en tout point. De plus on suppose qu'il existe deux sous-fibrés vectoriels N_+ et N_- de $T_\Sigma(T^*\mathbb{R}^n)$ de classe C^0 tels que:

(H_1) $T_\varrho\Sigma^\sigma=N_{+,\varrho}\oplus N_{-,\varrho}$ en tout point ϱ de Σ.