Commun. Math. Phys. 114, 515–526 (1988)

Communications in
Mathematical
Physics

Quasi homomorphismes, cohomologie cyclique et positivité

A. Connes et J. Cuntz*

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 35, route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette, France

Abstract. We show that cyclic cohomology of an algebra A is obtained from traces with suitable domains on the algebra qA of the second author. When A is a C^* algebra so is qA and the notion of positive trace makes sense. We hence get a notion of positivity for cyclic cocycles. We prove that a positive trace on qA defines a type I or II Fredholm module on A.

Introduction

La construction de [2] associe à tout module de Fredholm p-sommable pair $(\mathscr{h}, F, \varepsilon)$ sur une algèbre $\mathscr{A}$ et tout entier pair $n \geqq p-1$, un n-cocycle cyclique sur $\mathscr{A}$, le caractère de Chern de $(\mathscr{h}, F, \varepsilon)$. Soit $q\mathscr{A}$ l'algèbre universelle introduite dans [6]. Il résulte facilement de [6] qu'un module de Fredholm p-sommable pair est un homomorphisme de $q\mathscr{A}$ dans l'algèbre $\mathscr{L}^p(\mathscr{h}^+)$, idéal de Schatten des opérateurs p-sommables dans $\mathscr{h}^+ = \{\xi \in \mathscr{h}, \varepsilon\xi = \xi\}$. De manière équivalente c'est un quasi-homomorphisme de $\mathscr{A}$ dans $J = \mathscr{L}^p(\mathscr{h}^+)$. La construction de [2] se prolonge facilement à tout homomorphisme de $q\mathscr{A}$ dans une algèbre J munie d'une trace de domaine J^n. Notre but est de montrer que réciproquement tout n-cocycle cyclique sur $\mathscr{A}$ est obtenu par cette construction. Nous abordons ensuite, quand $\mathscr{A}$ (et donc $q\mathscr{A}$) est une algèbre involutive sur $\mathbb{C}$, le problème de l'existence d'une trace positive sur $q\mathscr{A}$ de caractère de Chern donné. Cela nous conduit à la notion de cocycle positif $\tau \in \operatorname{Ker} b \cap \operatorname{Ker} B$, dont nous donnons de nombreux exemples.

I. Les algèbres $\Omega\mathscr{A}$ et $q\mathscr{A}$

Soient k un corps de caractéristique nulle et $\mathscr{A}$ une k-algèbre. Rappelons (cf. [6]) que $q\mathscr{A}$ désigne l'idéal engendré dans le produit libre $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ par les éléments de la forme:

$$q(x) = i(x) - \bar{i}(x), \qquad x \in \mathscr{A},$$

* Département de Mathématiques, Université de Luminy, Route L. Lachamp, F-13288 Marseille, France