Commun. Math. Phys. 109, 313–326 (1987)

Communications in
Mathematical
Physics

Ergodicité et limite semi-classique

B. Helffer[1], A. Martinez[2] et D. Robert[1]

[1] Département de Mathématiques, 2, Rue de la Houssinière, F-44072 Nantes, France
[2] Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425, F-91405 Orsay, France

Abstract. Consider a self adjoint quantic hamiltonian: $P(h)=p(x, hD_x)$ where $h>0$ is the Planck's constant and p some smooth classical observable on the phase space $\mathbb{R}^{2n}$. When the classical flow on a compact energy shell $\{p=\lambda\}$ is ergodic we prove that in the limit $h\downarrow 0$ almost all the eigenfunctions of $P(h)$ whose energy is near of λ are distributed according to the Liouville measure on $\{p=\lambda\}$.

In the high energy case ($\lambda\to+\infty$) this sort of problem was considered by A. Schnirelman, S. Zelditch, and Y. Colin de Verdière.

0. Introduction

Le sujet abordé ici nous a été suggéré par un travail récent de Colin de Verdière [C.V] concernant la concentration des fonctions propres du Laplacien sur des variétés riemanniennes compactes, [C.V] faisant suite aux travaux de Schnirelman [S] et de Zelditch [Z] (cas des variétés à courbure constante négative).

En particulier [C.V, Sect. 6] pose le problème de l'extension des travaux précédents dans le cadre semi-classique: l'objet de ce travail est d'apporter une réponse à ce problème pour les fonctions propres d'opérateurs du type $P(h)=p(x, hD_x)$ correspondant à des surfaces d'énergie compactes sur lesquelles le flot classique est ergodique. Nous montrons également que pour les systèmes à un degré de liberté on obtient un résultat plus précis. Pour les systèmes à n degrés de liberté, $n\geqq 2$, l'existence d'hamiltoniens à flot ergodique sur des surfaces d'énergie ne semble toujours pas pouvée pour l'équation de Schrödinger, mais seulement conjecturée (cf. [V, Chap. III]).

Le plan de notre travail est le suivant:

1. Rappels et compléments d'analyse semi-classique
2. Utilisation de l'ergodicité
3. Conséquence du résultat principal du §2
4. Cas unidimensionel
5. Application à l'équation de Schrödinger