

L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques

Yves Colin de Verdière

Laboratoire de Mathématiques, Institut Fourier, Université de Grenoble 1,
B.P. 74, F-38402 Saint-Martin-d'Herès Cedex, France

Abstract. Nous prouvons une formule pour le comportement asymptotique de la fonction $N(\lambda)$ de dénombrement des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique qui tend vers l'infini à l'infini de \mathbb{R}^d . La preuve utilise un résultat précis sur l'estimation des valeurs propres pour un champ magnétique constant dans un cube de \mathbb{R}^d .

Introduction

Le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger $H = -\Delta + V$ lorsque $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ dans \mathbb{R}^d a été beaucoup étudié (voir par exemple [R–S], théorème XIII.81). L'analogie pour les champs magnétiques est moins connu. Les articles [A–H–S], puis [D], [I] mettent en évidence des conditions nécessaires et des conditions suffisantes sous lesquelles l'opérateur de Schrödinger associé à un champ magnétique $B(x)$ sur \mathbb{R}^d est à résolvante compacte.

L'asymptotique de ce spectre est le but du présent article qui reprend et améliore des résultats partiels [CV 3, CV 4]. Dans le cas $d = 3$, des résultats voisins ont été trouvés récemment par Tamura [T] de façon indépendante et par une méthode différente. La méthode utilisée ici est apparentée à la méthode de Weyl [C–H, R–S]: découpage en cubes et estimations pour les champs constants dans les cubes: c'est ces dernières estimations qui nous semblent être la partie la plus originale de notre article: elles peuvent également être utilisées dans des asymptotiques $\hbar \rightarrow 0$ ou dans d'autres problèmes, par exemple de laplaciens complexes en vue desquelles Demailly [DY 1, DY 2] a montré des inégalités du même type. Je tiens à le remercier ici pour les discussions que nous avons eues récemment sur ces sujets.

1. Bouteilles magnétiques

Soit (X, g) une variété riemannienne (pas nécessairement complète), B une 2-forme réelle fermée sur X telle que la classe de cohomologie de $B/2\pi$ est entière. Il existe