Commun. Math. Phys. 104, 509–528 (1986)

Communications in Mathematical Physics

Propriétés d'intersection des marches aléatoires

II. Etude des cas critiques

J.-F. Le Gall

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, Tour 56, F-75230 Paris Cedex 05, France

Abstract. Let I_n denote the number of common points to the paths, up to time n, of two independent random walks with values in $\mathbb{Z}^4$. The sequence $(\log n)^{-1} I_n$ is shown to converge in distribution towards the square of a normal variable. Limit theorems are also proved for some processes related to the sequence (I_n), which lead to a better understanding of recent results obtained by G. F. Lawler. Similar statements are proved for the paths of three independent random walks with values in $\mathbb{Z}^3$.

1. Introduction

L'objet du présent travail est de continuer l'étude, entreprise dans [11], du nombre de points d'intersection des trajectoires de k marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. Nous ne considèrerons que des marches aléatoires X vérifiant les deux hypothèses suivantes:

(H1) X est centrée et possède des moments d'ordre deux.

(H2) X est adaptée (apériodique au sens de Spitzer [12]).

L'hypothèse (H1) est essentielle pour nos applications, alors que l'hypothèse (H2) ne sert qu'à assurer que X ne vit pas sur un sous-groupe strict de $\mathbb{Z}^d$.

Soient $X^1, \ldots, X^k$ k $(k \geqq 2)$ marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, satisfaisant les hypothèses (H1) et (H2). Pour tout entier $n \geqq 1$ on note I_n le nombre de points communs aux trajectoires de $X^1, \ldots, X^k$ jusqu'à l'instant n. Nous cherchons à montrer la convergence en distribution de $(f(n))^{-1} I_n$ vers une loi non dégénérée, pour une certaine fonction déterministe $f(n)$. Ce problème est résolu dans [11] pour toutes les valeurs du couple (d, k), à l'exception des deux cas «critiques» $d=4$, $k=2$ et $d=3$, $k=3$ (dans les cas $d=2$, $k \geqq 4$ on n'obtient aussi qu'une réponse partielle, voir [11]). Comme le remarquent déjà Erdös et Taylor [2] ces valeurs du couple (d, k) correspondent à la situation où les trajectoires de k mouvements browniens indépendants en dimension d n'ont pas de points communs, alors qur le contraire se produit si l'on remplace les mouvements browniens par des marches aléatoires. Dans les cas critiques la «bonne» fonction