Commun. Math. Phys. 102, 497–502 (1985)

Communications in
Mathematical
Physics

Ergodicité et fonctions propres du laplacien

Y. Colin de Verdiere

Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, Université de Grenoble I,
F-38402 Saint-Martin-d'Heres Cedex, France

Résumé. Nous donnons la preuve d'une généralisation d'un résultat récent de S. Zelditch concernant la répartition asymptotique des fonctions propres du laplacien sur une variété compacte dont le flot géodésique est ergodique.

Abstract. Here we give the proof of some generalization of a recent result by S. Zelditch. It has to do with the asymptotic behaviour of Laplacian's eigenfunctions on a compact manifold whose geodesic flow is ergodic.

Soient M une variété riemannienne compacte, Δ le laplacien de M, (φ_k) $(k=0,1,2,\ldots)$ une base orthonormée de $L^2(X)$ formée de fonctions propres associées à la suite croissante de valeurs propres λ_k. Si A est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, on s'intéresse au comportement asymptotique quand $k\to+\infty$ de la suite $\langle A\varphi_k|\varphi_k\rangle$ où $\langle\ |\ \rangle$ est le produit L^2. Plus précisément, si a est le symbole principal de A, S^*M le fibré des vecteurs cotangents unitaires et $d\omega$ la mesure de Liouville normalisée par $\int d\omega=1$ sur S^*M, à quelles conditions a-t-on

$$\lim_{k\to+\infty}\langle A\varphi_k|\varphi_k\rangle=\int_{S^*M} a\,d\omega\,?$$

La réponse n'est pas toujours oui comme on peut le voir par examen du cas de la sphère S^2 munie de la métrique usuelle: si $\frac{\partial}{\partial\theta}$ est le champ de vecteurs des rotations infinitésimales autour d'un axe, il existe une base orthonormée $Y_{\ell,m}$ de $L^2(X)$ (harmoniques sphériques) telle que:

$$\begin{cases} \Delta Y_{\ell,m}=\ell(\ell+1)Y_{\ell,m}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}Y_{\ell,m}=imY_{\ell,m} \end{cases}$$

avec $\ell=0,1,2,\ldots$, et $-\ell\leqq m\leqq\ell$.