Commun. Math. Phys. 69, 131–146 (1979)

Communications in
Mathematical
Physics

Fonctions Propres et Non-Existence Absolue D'Etats Liés dans Certains Systèmes Quantiques

Bernard Gaveau

Université P. et M. Curie (Mathématiques), F-75230 Paris Cedex 05, France

Abstract. One proves a condition of absence of bound states for a Schrödinger operator independent of any self-adjoint extension. The method of proof uses Feynman Kac formula.

Introduction

Considérons un système quantique à n degrés de liberté dont l'hamiltonien est $-\frac{1}{2}\Delta+V$ où Δ est le laplacien de $\mathbb{R}^n$ et V le potentiel d'interaction (i.e. une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$). La théorie mathématique «usuelle» se fait d'habitude en définissant un hamiltonien H comme extension autoadjointe de $-\frac{1}{2}\Delta+V$ à l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie sur un domaine $D\subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dense. En particulier, il peut y avoir une infinité de telles extensions. En général, on en choisit une a priori, par exemple, «l'extension de Rayleigh-Ritz» H_1 où H est définie comme somme de formes quadratiques. On étudie alors les propriétés des fonctions propres et des valeurs propres relativement à cette extension. Dans le cas de l'extension comme somme de formes quadratiques, la première valeur propre est donnée par la formule variationelle de Rayleigh-Ritz et on peut en déduire divers critères d'absence d'états liés (voir [2, 4, 7] pour ce point de vue).

Un autre point de vue consiste à définir directement un semi-groupe de Feynman-Kac P_t par la formule de Kac (voir [3]). Sous certaines hypothèses, ce semi-groupe admet un générateur infinitésimal autoadjoint H_2. On dira alors que le système a un état lié pour l'extension de Feynman-Kac H_2, si il existe ψ de classe L^2 et $\lambda<0$ avec $(P_t\psi)(x)=e^{-\lambda t}\psi(x)$ pour tout λ. Le plus petit λ à satisfaire cette équation vérifie l'estimée de Kac ([3] et corollaire du lemme 4 du section 1) et dans [1] on démontre l'absence d'états liés relativement à l'extension de Feynman-Kac sous certaines hypothèses.

Un troisième point de vue consiste, lorsque V est localement bornée, à définir l'équation

$$(-\tfrac{1}{2}\Delta+V)\psi=\lambda\psi \tag{0}$$

0010-3616/79/0069/0131/\$03.20