

LES TAUBÉRIENS GÉNÉRAUX DE NORBERT WIENER

S. MANDELBROJT

Il est peu probable que A. Tauber, qui donna le premier théorème réciproque (conditionnel, bien entendu) du théorème d'Abel, à savoir que $\lim_{x \rightarrow 1} \sum A_n x^n = S$, avec $A_n = o(1/n)$, implique $\sum A_n = S$, ait jamais pu songer que son nom serait donné à un ensemble aussi vaste de théorèmes de l'Analyse. Il est vrai que, quels que soient l'intérêt et l'importance des "taubériens" démontrés entre 1897—date de la publication du théorème de Tauber—et la parution des taubériens généraux de Wiener, ce sont ces derniers qui ont élevé au rang d'une théorie structurée et harmonieuse l'ensemble des recherches consacrées à ce sujet.

Il semble que ce soit le théorème de Littlewood permettant de substituer le "O" au "o" de Tauber qui constitue la première étape importante "pre-wienerienne" dans cet ordre d'idées. Landau a pu remplacer la condition de Littlewood par la condition $nA_n > -K$, et celle-ci, jointe à la sommabilité au sens de Lambert de la suite A_n vers A , permet, d'après Hardy et Littlewood, d'affirmer que $\sum A_n = A$.

En partant de ce dernier taubérien, des auteurs ont pu déduire le théorème classique d'Hadamard et de de la Vallée-Poussin concernant la distribution des nombres premiers: $\pi(x) \sim x/\log x$.

Sans insister ici sur d'autres résultats très profonds de Landau, de Hardy-Littlewood et sur un théorème d'Ikehara, qui est une des plus belles applications des taubériens généraux, et dont nous parlerons plus loin, on aperçoit après cette simple énumération la richesse et les ramifications de l'ensemble des faits ainsi établis. Mais on s'aperçoit aussi de la dispersion de ces résultats, et des idées qui les ont guidés. On pouvait admirer le talent et la technique des chercheurs, mais il était difficile d'apercevoir une construction relevant d'une structure indiquant le fond de l'ensemble de ces recherches.

D'avoir trouvé un principe général concernant les transformées de Fourier, et notamment les convolutions—principe qui englobe les résultats cités et tant d'autres, anciens et nouveaux, tous importants—est le grand mérite de Wiener. Une des plus beaux chapitres de l'oeuvre de Norbert Wiener, de l'analyse harmonique, et de l'analyse, dite "classique," tout court, est ainsi créé.

Le taubérien général de Wiener est constitué en réalité de deux formes de théorèmes dont voici les deux énoncés essentiels [74], [81]:*

* Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie générale des oeuvres de Norbert Wiener.