NORBERT WIENER ET L'ANALYSE DE FOURIER

J.-P. KAHANE

Il ne peut s'agir ici d'une revue complète de tout ce que Wiener a apporté à l'analyse de Fourier. Je voudrais seulement mettre l'accent sur son rôle de pionnier. Pour cela, quelques exemples suffiront.

1. La théorie générale des algèbres de Banach, élaborée par Gelfand, est souvent considérée aujourd'hui comme un fondement de l'analyse harmonique. Elle permet en tous cas d'aborder plus facilement, et de mieux comprendre, certaines questions comme les théorèmes taubériens de Wiener, dont parle ailleurs S. Mandelbrojt. Mais en vérité il n'est pas exagéré de dire que les algèbres de Banach sont issues du premier chapitre de *Tauberian theorems* [74].[1] L'étude qu'y fait Wiener des sommes de séries de Fourier absolument convergentes, et des transformées de Fourier de fonctions sommables sur la droite, a fourni un modèle aux travaux ultérieurs de Paul Lévy, de Beurling, et finalement de Gelfand. En même temps, les problèmes laissés en suspens ont stimulé des recherches pendant trente ans; rappelons seulement le célébre "problème de Wiener," implicitement posé par l'énoncé du Théorème III de *Tauberian theorems*: soit f_1 et f_2 deux fonctions sommables sur la droite; est-il vrai que f_2 soit limite dans L^1 de combinaisons linéaires de translatées de f_1 dès que sa transformée de Fourier $\hat{f}_2$ s'annule partout où $\hat{f}_1$ s'annule? En termes plus abstraits: est-il vrai que tout idéal fermé de l'algèbre de convolution $L^1(R)$ soit l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent? On sait que la réponse, négative, n'a été apporté qu'en 1959, par Malliavin (la réponse pour $L^1(R^p)$, $p \geqq 3$, ayant été découverte antérieurement par L. Schwartz).

2. Autre modèle d'algèbre de Banach: l'algèbre $\hat{M}$ des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures bornées sur la droite. Les idéaux maximaux n'y sont pas si simples que dans les exemples précédents; c'est ce que montre l'exemple de Wiener et Pitt [105]: une $\hat{\mu} \in \hat{M}$, telle que $1/\hat{\mu}$ existe et soit bornée, mais n'appartienne pas à $\hat{M}$. Ç'a été là encore une belle source de travaux—le plus important restant le mémoire de Šreider de 1950.

3. Un sujet fascinant est la relation entre les propriétés d'une mesure bornée μ et le comportement à l'infini de sa transformée de

[1] Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie générale des oeuvres de Norbert Wiener.