SULLE TRASFORMAZIONI CREMONIANE CHE POSSEGGONO PER CURVA DI PUNTI UNITI UNA SESTICA CON DIECI PUNTI DOPPI

GIUSEPPE POMPILJ

In una precedente memoria *Sulla trasformazioni Cremoniane del piano che posseggono una curva di punti uniti*[1] ho messo in evidenza che tra i tipi possibili di siffatte trasformazioni si presentano quelle che hanno per curva di punti uniti una sestica con 10 punti doppi; per provare l'effettiva esistenza di tali trasformazioni ne ho dato un esempio (num. 21) che però è risultato essere insussistente perchè, come ha recentemente osservato A. B. Coble,[2] la trasformazione che si ottiene non è altro che l'identità. Perciò do quì un altro esempio.

La generica sestica razionale, con dieci punti doppi $P_1, P_2, \cdots, P_7, A, B, C$ di cui gli ultimi tre nei vertici del triangolo fondamentale $A(0, 1, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 0, 1)$, ha equazione parametrica:

$$\begin{aligned} x &= t(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)(t - \gamma_1)(t - \gamma_2), \\ y &= t(t - \beta_1)(t - \beta_2)(t - \gamma_3)(t - \gamma_4), \\ z &= (t - \alpha_1)(t - \alpha_2)(t - \beta_1)(t - \beta_2)(t - \gamma_5)(t - \gamma_6). \end{aligned}$$

Imponiamo a questa sestica di soddisfare alla seguente condizione: *le due involuzioni individuate dalle coppie che cadono nei punti doppi A, C e B, C devono essere permutabili.* Questo porta che sia $\alpha_1\alpha_2 = -\beta_1\beta_2$ o meglio $\beta_2 = -\alpha_1\alpha_2/\beta_1$; cioè si ha un solo legame tra i coefficienti e la condizione, come è naturale, risulta perfettamente simmetrica rispetto ai punti doppi A e B. In questo caso l'equazione della nostra sestica S diventa:

$$\begin{aligned} x &= t(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)(t - \gamma_1)(t - \gamma_2), \\ y &= t(t - \beta_1)(t + \alpha_1\alpha_2/\beta_1)(t - \gamma_3)(t - \gamma_4), \\ z &= (t - \alpha_1)(t - \alpha_2)(t - \beta_1)(t + \alpha_1\alpha_2/\beta_1)(t - \gamma_5)(t - \gamma_6), \end{aligned}$$

ed un semplice esame di questa equazione parametrica ci assicura che nell'intorno dei tre punti doppi A, B, C non esistono altri punti multipli di S.

Ma ancora con una sola condizione si può imporre che la sestica abbia:

---

[1] Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Roma, (4), vol. 2 (1938).

[2] This Bulletin, vol. 45 (1939).