QUELQUES REMARQUES SUR LES RELATIONS ENTRE LES NOTIONS D'ÉCART RÉGULIER ET DE DISTANCE

N. ARONSZAJN

Madame A. Frink a donné récemment* une nouvelle démonstration très élégante du théorème suivant de M. E. W. Chittenden: *Si dans un espace E la notion de limite est définie par un écart régulier r,*† *elle peut être définie également par une distance ρ.*

La démonstration de Mme Frink repose sur une construction de la distance ρ qui, à cause de sa simplicité, permet d'établir des relations étroites entre les propriétés métriques de l'écart r et de la distance ρ.

Dans ce qui suit, nous allons indiquer des relations de ce genre dans quelques cas simples. Par r nous désignerons un écart régulier défini dans l'espace E et par ρ la distance correspondante construite par Mme Frink.

1. **Les écarts complets.** Nous dirons qu'une suite de points $\{p_n\}$ de E est une *suite de Cauchy selon r*, si $\lim_{i=\infty,j=\infty} r(p_i, p_j)=0$. Si toute suite de Cauchy selon r converge dans E, l'écart r sera dit *complet.*

De la démonstration de Mme. Frink résulte qu'il existe deux fonctions croissantes $\mu_1(\eta)$ et $\mu_2(\eta)$ telles que $\mu_i(\eta)>0$ pour $\eta>0$, $\mu_i(0) =\lim_{\eta=0}\mu_i(\eta)=0$, et que

$$\mu_1(r(p, q)) \leqq \rho(p, q) \leqq \mu_2(r(p, q)), \tag{1}$$

pour tous les p, q de E.‡

Il s'ensuit de (1) immédiatement qu'une suite de Cauchy selon r est en même temps une suite de Cauchy selon la distance ρ et vice versa. De ce fait découle le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour que la distance ρ soit complète, il faut et il suffit que l'écart r le soit.*

2. **La presque-convexité.** Un écart r' est dit presque-convexe, si, pour tous a, b de E et tout $\eta>0$, il existe un c de E tel que

* Ce Bulletin, vol. 43 (1937), p. 133.

† On dit d'apres M. Fréchet que dans E est défini un écart régulier r, si pour tout couple de points (p, q) de E est défini un nombre $r(p, q)\geqq 0$ tel que: (1) $r(p, q)=0$ *équivaut à $p=q$,* (2) $r(p, q)=r(q, p)$, et (3) *il existe une fonction positive croissante $\delta(\epsilon)$, pour $\epsilon>0$, telle que, si $r(x, y)\leqq\delta(\epsilon)$ et $r(y, z)\leqq\delta(\epsilon)$, $r(x, z)\leqq\epsilon$.*

‡ Les fonctions $\mu_i(\eta)$ ne dépendent que de la fonction $\delta(\epsilon)$ qui correspond à l'écart r. Pour $\delta(\epsilon)=\epsilon/2$, on peut prendre $\mu_1(\eta)=\eta/4$ et $\mu_2(\eta)=\eta$.