ENSEMBLES ET MORPHISMES STRATIFIÉS[1]

R. THOM

La catégorie des complexes simpliciaux, et des applications simpliciales, si elle permet une description explicite des types topologiques des espaces et des applications correspondantes, n'en présente pas moins deux inconvénients:

(1) Elle exige en général une subdivision trop fine, topologiquement arbitraire, de l'espace sous-jacent. (On sait par exemple le nombre élevé de sommets requis pour une triangulation d'un objet aussi simple que le tore T^2.)

(2) Certaines applications algébriques très simples, comme l'application du plan Ouv sur le plan Oxy définie par $x=u$, $y=uv$ (σ-Prozess de Hopf) ne peuvent être réalisées simplicialement.

C'est dans le but de pallier ces défauts que nous introduisons ici la catégorie des *ensembles et morphismes stratifiés*. La présentation donnée ici est le fruit d'un long processus d'approximations successives, qui n'a sans doute pas atteint son état terminal. J'espère néanmoins que l'essentiel de la structure peut être considéré comme définitivement dégagé. Qu'il me soit permis de remercier ici tous ceux qui, dans divers séminaires, (à l'I.H.E.S. de Paris, à Brandeis) m'ont aidé de leurs conseils, de leurs critiques, ou de leurs rédactions. Je citerai en particulier: H. Cartan, D. Fotiadi, H. Hironaka, H. Levine, S. Łojasiewicz, J. Mather, B. Morin, F. Pham, M. H. Schwartz, O. Zariski. On reconnaitra au passage le rôle fondamental des idées de H. Whitney, qui, en introduisant les propriétés (A) et (B) des ensembles analytiques, a fait faire à la théorie un progrès décisif.

I. Théorie Topologique

A. Une construction auxiliaire. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une application continue d'un espace topologique X dans une espace Y. Munissons la réunion disjointe $X \cup Y$ de la topologie engendrée par les ouverts suivants:

(1) $U \subset X$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de X

(2) $f^{-1}(V) \cup V$, où V parcourt l'ensemble des ouverts de Y.

Soit $M(f)$ l'espace ainsi défini; l'application f se factorise en $X \xrightarrow{i} M(f) \xrightarrow{j} Y$, où i est une injection ouverte, et j une surjection.

Etant donné un diagramme commutatif d'applications de la forme

[1] Research supported by NSF GN 530 to the American Mathematical Society.