SOUS-GROUPES D'INDICE FINI DANS $SL(n, Z)$

PAR H. BASS, M. LAZARD ET J-P. SERRE

Communicated by Deane Montgomery, November 18, 1963

1. **Enoncé du théorème et schéma de démonstration.** Soit n un entier $\geqq 2$, et soit $G(n) = SL(n, Z)$. Si q est un entier $\geqq 1$, nous noterons $G_q(n)$ le noyau de l'homomorphisme canonique

$$SL(n, Z) \to SL(n, Z/qZ).$$

Un sous-groupe de $G(n)$ est appelé un *sous-groupe de congruence* s'il contient l'un des $G_q(n)$. Un tel sous-groupe est évidemment d'indice fini dans $G(n)$. Réciproquement:

THÉORÈME 1. *Si $n \geqq 3$, tout sous-groupe d'indice fini de $SL(n, Z)$ est un groupe de congruence.*[1]

(Pour $n = 2$, il est bien connu que l'énoncé analogue est *faux*.)

Soit $\hat{G}(n)$ (resp. $A(n)$) le complété de $G(n)$ pour la topologie des sous-groupes d'indice fini (resp. des sous-groupes de congruence). Les groupes $\hat{G}(n)$ et $A(n)$ sont des groupes *profinis*, cf. [4]. On notera que, d'après le théorème d'approximation dans le groupe SL_n, le groupe $A(n)$ s'identifie au produit des groupes $SL(n, Z_p)$, pour tous les nombres premiers p (on note Z_p l'anneau des entiers p-adiques). Il est clair que $A(n)$ s'identifie au quotient de $\hat{G}(n)$ par un sous-groupe distingué fermé $C(n)$. La suite exacte correspondante:

$$1 \to C(n) \to \hat{G}(n) \to A(n) \to 1$$

sera notée (X_n). *Le Théorème* 1 *équivaut à dire que* $C(n) = 1$ *pour* $n \geqq 3$.

L'étude des groupes $C(n)$ utilise la méthode de "suspension" de [1]. De façon précise, soit S: $G(n) \to G(n+1)$ l'homomorphisme défini par la formule:

$$S(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in G(n).$$

Cet homomorphisme se prolonge par continuité en un homomorphisme (encore noté S) de la suite exacte (X_n) dans la suite exacte (X_{n+1}); en particulier, S: $C(n) \to C(n+1)$ est bien défini.

---

[1] (Note ajoutée le 27 novembre 1963.) Nous apprenons que le théorème 1 a été également démontré par J. Mennicke; sa démonstration doit paraître dans les Ann. of Math.