J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
32 (1990) 199-207

TRIANGULATIONS PRESQUE ÉQUILATÉRALES DES SURFACES

Y. COLIN DE VERDIÈRE & A. MARIN

On s'intéresse à montrer l'existence sur une surface riemannienne compacte sans bord arbitraire de triangulations géodésiques aussi fines que l'on veut et telles que les angles de leurs triangles soient aussi proches que possible de $\pi/3$. Le cas à bord lisse peut être traité de façon analogue. Les résultats obtenus sont optimaux.

La motivation initiale pour ce problème vient de la méthode des éléments finis: si $\mathcal{T}$ est une triangulation d'une surface riemannienne compacte que l'on peut supposer localement euclidienne, notons $S = \{1, 2, \cdots, N\}$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ et A l'ensemble des arêtes de $\mathcal{T}$. On associe à $\mathcal{T}$ l'espace vectoriel $E_{\mathcal{T}}$ de dimension N des fonctions numériques continues affines sur chaque triangle et on représente chaque fonction f de $E_{\mathcal{T}}$ par le vecteur $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ des valeurs $x_i = f(i)$.

Pour $f \in E_{\mathcal{T}}$, $q(f) = \int |df|^2$, l'intégrale de Dirichlet de f est de la forme:

$$q(f) = \sum_{\{i,j\}\in A} a_{i,j}x_ix_j + \sum_{i\in S} b_ix_i^2.$$

On souhaite que $\mathcal{T}$ soit telle que tous les $a_{i,j}$ soient < 0: cela est vérifié en particulier lorsque tous les triangles de $\mathcal{T}$ sont à angles aigus: d'où le problème de se rapprocher au maximum de triangles équilatéraux. (Voir [3] pour ce genre d'opérateurs sur les graphes.)

Commençons par une

Définition. Si $0 < \alpha \leq \beta$ sont deux nombres positifs et $(\mathcal{T}_n)$ une suite de triangulations d'une surface riemannienne compacte sans bord (X, g), on dira que $(\mathcal{T}_n)$ est une $\{\alpha, \beta\}$ triangulation de (X, g) si:

(i) la borne supérieure des diamètres des triangles de $\mathcal{T}_n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, $\forall n \geq N$, les angles de tous les triangles des $\mathcal{T}_n$ sont dans $[\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$.

Received November 3, 1987 and, in revised form, February 22, 1989.