J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
30 (1989) 395–424

IMMERSIONS ISOMÉTRIQUES ELLIPTIQUES ET COURBES PSEUDO-HOLOMORPHES

FRANÇOIS LABOURIE

De nombreux problèmes de type elliptique sur les surfaces reçoivent une interprétation en terme de géométrie complexe. Rappelons, par exemple, la représentation de Weierstrass pour les surfaces minimales ou les constructions twistorielles pour les applications harmoniques.

Dans cet article, nous nous intéresserons aux immersions isométriques elliptiques (ou localement convexes) d'une surface dans une variété de dimension 3. Par elliptique (resp. ε-elliptique), nous entendons simplement que le discriminant de la deuxième forme fondamentale est positif (resp. supérieur à un ε positif). Notre remarque initiale est que le 1-jet d'une telle immersion définit une courbe pseudo-holomorphe. Une telle interprétation va nous permettre de contrôler la façon dont dégénèrent ces immersions. L'un de nos outils fondamentaux est alors la généralisation du lemme de Schwarz par M. Gromov [2].

Contrôler la compacité de l'espace des solutions d'un problème elliptique est bien souvent l'un des points cruciaux de la démonstration de l'existence de telles solutions. Dans notre cas, nous avons, en particulier, obtenu le théorème d'existence d'immersions isométriques suivant:

Théorème A. *Soit M une variété simplement connexe de dimension* 3 *à courbure sectionelle inférieure où égale à K_0. Soit U un domaine orienté de la sphère muni d'une métrique complète et à courbure supérieure strictement à K_0. Il existe alors un plongement propre isométrique, qui respecte l'orientation, de U dans M. On peut par ailleurs imposer arbitrairement le* 1*-jet de notre plongement en un point.*

Ce théorème généralise un théorème connu lorsque M est à courbure constante [8, p. 38]. Il généralise également un théorème de Pogorelov dans le cas U compact (c'est à dire la sphère), et dont nous proposons une nouvelle démonstration, sensiblement plus courte:

Théorème B (*Pogorelov*). *Soit M une variété de dimension* 3 *à courbure sectionelle inférieure où égale à K_0. Soit S une surface orientée,*

Received September 1, 1987.