J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
6 (1972) 503-522

EQUATIONS DE LIE. I

BERNARD MALGRANGE

Introduction

L'article qui suit donne une nouvelle version de la théorie des pseudogroupes de Lie et des déformations de structure de Spencer (voir notamment [24], [5] et [15]). La principale différence avec les versions antérieures consiste en l'emploi systématique du calcul différentiel à la Grothendieck, i.e., du calcul dans les voisinages infinitésimaux de la diagonale [13]; le rôle fondamental est joué ici par la connexion canonique, qui était déjà considérée implicitement dans la cohomologie de Spencer ([24]; voir aussi [17]). Cette connexion a été définie, et utilisée en géométrie algébrique par Grothendieck [14]. En gros, les "voisinages infinitésimaux de la diagonale" jouent le rôle que tiennent habituellement les espaces de repères; la connexion canonique tient alors la place de la "forme fondamentale" de Cartan, ce qui simplifie, voire trivialise une partie des calculs.

L'essentiel de ce formalisme—au moins, de sa partie infinitésimale—est développé au chapitre I, notamment au paragraphe 3, la formule essentielle étant le théorème (3.10). La fin du chapitre I et le chapitre II sont consacrés à deux questions: d'une part, au passage des automorphismes infinitésimaux aux automorphismes tout court; d'autre part, à l'introduction des "équations de Lie" (c'est-à-dire des équations qui définissent les pseudogroupes de Lie, dans la terminologie usuelle), et à l'étude de leurs prolongements.

En principe, ces questions sont à peu près claires, une fois le formalisme précédent mis en place. L'auteur, non sans une certaine répugnance, a cru devoir cependant développer en détail les inévitables sorites que cette question comporte, pour les replacer dans le cadre du point de vue développé ici, d'une part, faute d'avoir à sa disposition une référence suffisamment satisfaisante d'autre part. Le point le plus intéressant est probablement contenu dans les formules (6.3) à (6.7) qui établissent les liens entre notre formalisme (c'est-à-dire essentiellement l'opérateur $\mathscr{D}$ de Spencer et la manière dont il est introduit ici), la forme fondamentale de Cartan, et la théorie du prolongement des équations de Lie. Signalons qu'une partie de ces liens avait été antérieurement donnée par Guillemin-Sternberg [15], et une autre par Quê [21].

Au total, le formalisme obtenu se révèle à l'usage utilisable, malgré une

Received February 3, 1972. Due to its length this paper is being published in two parts; Part II will appear in the first issue of the next volume.