J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
4 (1970) 383-424

MÉTRIQUES RIEMANNIENNES ET COURBURE

THIERRY AUBIN

Introduction

Nous allons étudier certains changements de métrique sur les variétés Riemanniennes, et examiner dans quelle mesure, on peut modifier les propriétés de la courbure. Un problème fondamental de la géométrie différentielle est de déduire, à partir des propriétés du tenseur de courbure, des propriétés topologiques pour la variété, et même si possible d'identifier la variété comme homéomorphe à une variété connue. Les résultats de ce type sont trés nombreux.

D'après le théorème de Whitney, sur une variété C^∞ il existe une métrique C^∞: g. Dans un système de coordonnées locales, à partir de l'expression des composantes g_{ij} du tenseur métrique, on peut calculer les composantes du tenseur de courbure. Mais il y a peu de chance pour que les propriétés de ce tenseur de courbure puissent -être exploitées directement par un des nombreux théorèmes existant.

Aussi peut-on penser déformer la métrique initiale de manière à ce que les propriétés du tenseur de courbure ou de ses contractés soient plus agréables. Certaines propriétés de la courbure ont une signification topologique, bien souvent un exemple la met en évidence. Mais là où nous n'avons aucun exemple montrant le caractère topologique de la propriété envisagée, on peut penser que cette propriété n'a pas d'implication topologique, et pour le montrer il suffit de construire sur toute variété Riemannienne une métrique dont la courbure ait la propriété envisagée.

Dans une première partie, on étudie localement les changements de métrique: à l'intérieur d'une boule de petit rayon on modifie la métrique sans rien changer à l'extérieur. Cette méthode permet d'établir des résultats sur la courbure scalaire, la courbure de Ricci et la courbure conforme. En considérant le changement de métrique $g'_{ij} = g_{ij} + \partial_i\varphi\partial_j\varphi$ avec $\varphi \in C^\infty$, on montre que sur toute variété riemannienne compacte de dimension supérieure à deux, il existe une métrique dont la courbure scalaire est négative. Grâce à un changement de métrique du même type, on montre que sur toute variété Riemannienne il existe une métrique pour laquelle le carré du tenseur de

Communicated by A. Lichnerowicz, December 5, 1967, and, in revised form, May 6, 1969.