J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
41 (1995) 21-52

UNE NILVARIETE NON AFFINE

YVES BENOIST

Abstract

I construct compact nilvarieties which carry no complete affine structures. For that, I construct n-dimensional nilpotent Lie algebras with no faithful $(n+1)$-dimensional linear representations.

1. Introduction

1.1. Une structure affine sur une variété compacte C^∞ W est la donnée d'un atlas maximal de cartes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont les changements de cartes sont localement des transformations affines de $\mathbb{R}^n$. Il est équivalent de se donner sur W une connexion ∇ plate et sans torsion. Il est aussi équivalent de se donner un difféomorphisme local D du revêtement universel $\widetilde{W}$ de W dans $\mathbb{R}^n$, appelé développante, tel qu'il existe une représentation h du groupe fondamental $\pi_1(W)$, dans le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ des transformations affines de $\mathbb{R}^n$, appelée holonomie, avec, pour w dans $\widetilde{W}$ et γ dans $\pi_1(W)$, $D(\gamma w) = h(\gamma)D(w)$; si g est dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, les développantes D et $g \circ D$ sont considérées comme équivalentes.

Une structure affine est dit complète si D est un difféomorphisme, ou, ce qui est équivalent, si la connexion ∇ est complète.

Les exemples les plus simples sont les tores $\mathbb{T}^n$ dont le revêtement universel est l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Ces exemples ont été généralisés à de nombreuses nilvariétés (resp. solvariétés): quotients de groupes de Lie nilpotents (resp. résolubles) par des sous-groupes discrets cocompacts (voir par exemple [13], [1], [9], [15], [6]). Ceci a conduit Scheuneman [13] et Milnor [9] à poser la question suivante (voir aussi [8], [2], [4], [10]): Toute nilvariété compacte admet-elle une structure affine complète? Nous montrons qu'il n'en est rien:

Théorème 1. *Il existe une nilvariété compacte W qui ne porte aucune structure affine complète.*

Les exemples que nous donnons sont de dimension 11. Nous conjecturons qu'il existe de tels exemples en toute dimension supérieure à 11. Nous

Received July 7, 1992.