J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
39 (1994) 281-330

# FORMES DIFFERENTIELLES SUR LES VARIETES DE CONTACT

MICHEL RUMIN

## Introduction

La géométrie de contact a connu un regain d'intérêt ces dernières années. De nouvelles théories se sont en effet développées rapidement permettant une investigation de plus en plus poussée de cette géométrie. Il en est ainsi des notions de capacités symplectiques, de courbes pseudoholomorphes et de structure de contact tordues.

D'un point de vue plus élémentaire, cet article s'attache à définir et utiliser des notions de formes différentielles, de laplaciens et de courbure "adaptées" à la géométrie de contact.

Pour préciser ceci, considérons les groupes de Lie les plus "simples" munis d'une structure de contact naturelle: les groupes de Heisenberg. Ils possèdent une famille de dilatations agissant, de façon non isotrope, par des homothéties de rapport $\lambda$ sur le champ de contact $Q$ et $\lambda^2$ suivant le centre $T$. Celles-ci induisent en particulier des changements de métriques invariantes par translations de $g = g_Q + g_T$ en $g_\lambda = \lambda g_Q + \lambda^2 g_T$ où $\lambda$ est constant. Nous remarquons, dans la première partie de cet article, que la condition de cofermeture des formes, au sens du complexe de De Rham, n'est pas invariante sous les changements d'échelle $\lambda$. Ceci se produit car la différentielle extérieure est un opérateur isotrope, mêlant sans distinction des dérivations suivant $Q$, de poids un, et transverses de poids deux.

Pour y remédier, nous construisons sur les variétés de contact un complexe de formes différentielles "modulo formes de contact" possédant, lui, la bonne homogénéité. Nous montrons ensuite qu'il est localement exact. Sa cohomologie coïncide alors avec celle de De Rham de la variété.

L'étape classique suivante consiste à étudier les laplaciens issus de ce complexe. Ici, les calculs se compliquent car, contrairement à leurs homologues riemanniens, ces laplaciens ne sont pas scalaires modulo des termes d'ordre inférieur (excepté en dimension 3). De plus, en degrés moitiés, ces

Received June 29, 1992.