

SUPPRESSION LAGRANGIENNE DE POINTS DOUBLES ET RIGIDITÉ SYMPLECTIQUE

FRANÇOIS LALONDE

1. Introduction

Les théories de l'intersection lagrangienne et des plongements lagrangiens ne jouissent pas, au contraire des immersions, de la flexibilité due au h -principe. Cette rigidité explique les difficultés qu'on y rencontre: il n'existe pas d'équivalent lagrangien (ou lagrangien exact) de la théorie classique de suppression des points doubles. Le but de cet article est d'examiner les hypothèses sous lesquelles la théorie classique se généralise aux immersions lagrangiennes, en distinguant les conditions topologiques et symplectiques.

Examinons d'abord les conditions topologiques. La théorie classique se résume en ceci: on peut supprimer par homotopie régulière une paire de points doubles p_1, p_2 d'une immersion $i: V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (V de dimension n , orientable ou non; $n > 2$, pair ou impair) exactement quand il existe un lacet orienté C dans $i(V)$ de coins p_1 et p_2 dont l'image par l'application de Gauss (après régularisation aux coins) est un générateur de $\pi_1(G(n, n))$. Comme $\pi_1(G(n, n)) \simeq \pi_1(\text{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$, ceci ne dépend en fait que des signes de p_1 et p_2 relativement à C (c'est une *courbe de Whitney* quand ces signes sont différents) et on trouve la caractérisation de Whitney pour la suppression des points doubles donnée en termes du nombre algébrique de points doubles [10].

La situation est, de ce point de vue, similaire mais plus riche pour les immersions lagrangiennes, puisque l'indice de Maslov d'un lacet orienté C de coins p_1, p_2 prend ses valeurs dans \mathbb{Z} (le cas lagrangien diffère nettement du cas totalement réel dont la grassmannienne est homotopiquement équivalente à $\Lambda(n)$ mais où il n'existe pas de définition invariante de l'indice d'une courbe de Whitney). Les courbes de Whitney sont ici exactement celles pour lesquelles l'indice de Maslov est impair; la partie topologique des conditions suffisantes pour la suppression