J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
31 (1990) 527-534

DEGENERATIONS DE LEFSCHETZ ET VARIATIONS DE STRUCTURES DE HODGE

CLAIRE VOISIN

0. Introduction

Ce travail propose une réponse partielle au problème suivant, posé par R. Friedman dans [6].

0.1. Problème. Soit $\mathscr{X} \xrightarrow[p]{} \Delta$ une dégénération de Lefschetz de variétés de dimension paire $2m > 2$ paramétrée par le disque Δ; montrer qu'en général, pour tout changement de base $\Delta_n \underset{s \to t = s^n}{\longrightarrow} \Delta$ la variété $\mathscr{X}_n^* = \mathscr{X}^* \times_{\Delta^*} \Delta_n$ ne peut être compactifiée en une variété lisse $\tilde{\mathscr{X}}_n \xrightarrow[p_n]{} \Delta_n$ telle que p_n soit lisse au dessus de 0.

Rappelons d'abord que si $m = 1$, une construction du à Atiyah fournit une telle compactification: en fait le changement de base $t = s^2$ introduit sur $\mathscr{X}_2 = \mathscr{X} \times_\Delta \Delta_2$ une singularité quadratique ordinaire qui en dimension trois admet une "petite résolution" $\hat{\mathscr{X}}_2$; la fibre de $\hat{p}_2\colon \hat{\mathscr{X}}_2 \to \Delta_2$ en 0 est alors la résolution minimale de $\mathscr{X}_0$.

0.2. Dans la situation de 0.1, si $\mathscr{X}$ est kählérienne, on sait que pour un changement de base de degré pair, qui élimine l'action de la monodromie sur la cohomologie de $\mathscr{X}_t$, l'application des périodes, définie sur Δ_n^*, se prolonge en 0 (cf. [8]) munissant $\mathscr{X}_0$ d'une structure de Hodge limite pure qui a priori ne se distingue pas de celle d'une variété lisse.

0.3. Par ailleurs J. Morgan montre dans [9] qu'il n'y a pas d'obstruction différentiable à l'existence de $\tilde{\mathscr{X}}_n$, pour certaines valeurs de n. Notons enfin que pour une dégénération de quadriques projectives $\mathscr{Q} \to \Delta$, $\mathscr{Q}_2 = \mathscr{Q} \times_\Delta \Delta_2$ se désingularise en $\tilde{\mathscr{Q}}_2 \to \Delta_2$, et le transformé strict $\tilde{\mathscr{Q}}_0$ de la fibre centrale se contracte, de sorte que $\mathscr{Q}_2$ est en fait biméromorphiquement équivalent à un produit $\mathscr{Q}_{2m} \times \Delta_2$.

0.4. Faisant l'hypothèse que $\mathscr{X} \to \Delta$ est une dégénération de Lefschetz d'hypersurfaces de $\mathbf{P}^{2m+1}$ à fibré canonique trivial (i.e., de degré $2m+2$), on prouve ici:

Received December 7, 1988.