J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
18 (1983) 755–782

VARIÉTÉS KÄHLERIENNES DONT LA PREMIÈRE CLASSE DE CHERN EST NULLE

ARNAUD BEAUVILLE

Introduction

Ce travail comprend deux parties. La première expose la structure des variétés kähleriennes compactes avec $c_1 = 0$, suivant des idées de F. Bogomolov [2], et d'autres auteurs (e.g. S. Kobayashi et M. L. Michelsohn [13]). D'après les théorèmes de de Rham et de Berger, les variétés kähleriennes compactes Ricci-plates se décomposent (à un revêtement étale près) en produits de trois types primitifs: les tores complexes et les variétés d'holonomie $SU(m)$ ou $Sp(r)$. Le théorème de Yau, joint à la méthode de Bochner, permet de traduire ce résultat en un théorème de décomposition des variétés compactes de type kählerien avec $c_1 = 0$, indépendant du choix d'une métrique. Dans cette décomposition apparaissent, outre les tores complexes, d'une part des variétés projectives à fibré canonique trivial, n'admettant de formes holomorphes non nulles qu'en degré maximum (tous les exemples usuels de variétés projectives simplement connexes avec $c_1 = 0$ rentrent dans cette catégorie); et d'autre part des variétés symplectiques, c'est-à-dire munies d'une 2-forme holomorphe non dégénérée en tout point.

La seconde partie est consacrée aux variétés kähleriennes symplectiques irréductibles (pour un géomètre différentiel, ce sont les variétés riemanniennes compactes admettant comme groupe d'holonomie le groupe symplectique). Les surfaces $K3$ ont longtemps fourni le seul exemple connu de variétés de ce type;[1] une variété de dimension 4 a été récemment construite par A. Fujiki. En généralisant la construction de Fujiki, nous donnons ici deux séries d'exemples en toute dimension. Nous étudions ensuite les périodes des 2-formes sur les variétés symplectiques. La situation est très analogue à celle des surfaces $K3$: l'espace $H^2(X, \mathbf{C})$ est muni d'une forme quadratique (définie sur $\mathbf{Z}$), et l'application des périodes est un isomorphisme local de l'espace des modules sur la quadrique de $\mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C}))$ définie par cette forme quadratique. On

Received February 1, 1983.

[1] L'article [3] énonce qu'il n'en existe pas d'autres, mais la démonstration contient une erreur.