J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
16 (1981) 537–550

INTÉGRANDS DES NOMBRES CARACTÉRISTIQUES ET COURBURE : RIEN NE VA PLUS DÈS LA DIMENSION 6

JEAN PIERRE BOURGUIGNON & ALBERT POLOMBO

Dédié au Professeur Buchin Su à l'occasion de son 80ième anniversaire

1. Introduction, motivation

D'après la théorie de Chern-Weil (cf. [3]), les nombres caractéristiques d'une variété riemannienne compacte orientée M de dimension $n = 2m$ s'expriment par des intégrales de polynôme de degré m en son tenseur de courbure. Pour étudier le signe d'un nombre caractéristique, l'approche la plus simple consiste donc à regarder en chaque point le signe de l'intégrand correspondant.

En dimension 4 cette approche algébrique a permis à J. Thorpe puis à N. Hitchin d'obtenir le résultat suivant (cf. [14] et [5]) relatif aux métriques d'Einstein (i.e., celles dont la courbure de Ricci est un multiple de la métrique):

Théorème E. *Sur une variété compacte orientée d'Einstein M de dimension 4, la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ et le premier nombre de Pontrjaguine $p_1(M)$ vérifient l'inégalité*

$$(\mathrm{E}_4) \qquad |p_1(M)| \leq 2\chi(M),$$

qui est conséquence, après intégration, de l'inégalité algébrique

$$(\mathrm{AE}_4) \qquad |p_1(R)| \leq 2\chi(R),$$

où R désigne le tenseur de courbure de la métrique; de plus l'égalité n'a lieu que si la courbure de Ricci est nulle.

Il est établi dans [10] que cette inégalité est encore satisfaite si l'on impose différents types de pincement à la courbure sectionnelle ou à la courbure de Ricci, donc des conditions ouvertes sur le tenseur de courbure.

Le théorème E contient le théorème E'suivant (qui fut établi antérieurement par M. Berger [1]).

Received November 14, 1981.