J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
13 (1978) 373-383

ESPACES À COURBURE QUASI-CONSTANTE

VALENTIN BOJU & MARIANA POPESCU

0. Introduction

On étudie une classe des espaces de Riemann qui constituent une généralisation naturelle des espaces à courbure constante. On établit certaines propriétés des espaces QC concernant leur structure, des conditions d'être irréductibles et local-symétriques. On considère des champs Jacobi le long des trajectoires d'un champ distingué X_n. Finalement, on remarque quelques questions relatives aux espaces de Riemann qui satisfont seulement une partie de conditions utilisées pour définir les espaces QC.

1. Espaces QC

Soit $(M, \langle\ \rangle)$ une variété riemannienne de dimension $n \geq 4$, $D^1(M)$ l'algèbre de Lie des champs vectoriels sur M, et $F(M)^0 = \{f\colon M \to R, f \in C^\infty\}$, où $\langle\ \rangle$ désigne le champ métrique g. Pour un vecteur A de l'espace tangent M_p, $p \in M$, notons par $C(A, \theta)$ l'ensemble des facettes planes $\subset \in M_p$ qui font avec A un angle égal à $\sphericalangle (A, \sigma) = \theta$.

Supposons maintenant qu'il existe

$$p \in M\,, \quad X \in M_p\,, \quad \text{et } \theta_0 \in (0; \tfrac{1}{2}\pi)\,, \quad \text{où } X \neq 0\,,$$

de sorte que

$$k(\sigma_1) = k(\sigma_2) \overset{\text{notation}}{=\!=\!=\!=} E \tag{1.1}$$

pour toutes les facettes planes σ_1, $\sigma_2 \in C(X; \theta_0)$, où $k(\sigma)$ est la courbure plane du σ. Évidemment, on peut considérer $\|X\| = 1$.

Soit $\sigma \in C(X; \theta_0)$ et $\{Y, Z\}$ une base orthonormée du plan σ. La condition $\sigma \in C(X; \theta_0)$ est équivalente à

$$\langle X, Y\rangle^2 + \langle X, Z\rangle^2 = \cos^2 \theta_0\,. \tag{1.2}$$

Soit $\{X_i\}_{i=1,\cdots,n}$ une base orthonormée de l'espace M_p telle que $X_n = X$. On désigne par W^i les composantes du vecteur $W \in M_p$ dans la base considérée, et par R_{ijkl} les composantes du tenseur de courbure dans la même base. Parce

Received November 12, 1976, and, in revised form, March 28, 1977.