J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
13 (1978) 51-78

APPLICATIONS HARMONIQUES DE SURFACES RIEMANNIENNES

LUC LEMAIRE

1. Introduction

Soient M, g et M', g' des variétés riemanniennes connexes, de classe C^∞, de dimensions n et n', éventuellement à bord (les bords étant alors notés ∂M et $\partial M'$). Nous supposons toujours ces variétés compactes. Nous définissons les applications harmoniques de M dans M' en suivant [10]:

(1.1) Définition. L'énergie d'une application $f \in C^\infty(M, M')$ est définie par

$$E(f) = \int_M e(f) v_g ,$$

où $e(f) = \frac{1}{2}|df|^2$ est la densité d'énergie de f en un point.

Dans des systèmes de coordonnées locales $\{x^i\}$ et $\{u^\alpha\}$ sur M et M', $e(f) = \frac{1}{2}g^{ij}f_i^\alpha f_j^\beta g'_{\alpha\beta}$ où $f_i^\alpha = \partial f^\alpha / \partial x^i$.

(1.2) Définition. Une application $f \in C^\infty(M, M')$ est harmonique ssi elle est point critique de la fonction E.

Dans des systèmes de coordonnées locales, notons

$$f_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k f_k^\alpha$$

la dérivée covariante seconde de f, et $\Delta f^\alpha = g^{ij} f_{ij}^\alpha$ le laplacien de f^α.

(1.3) Proposition [10]. *Une application f est harmonique ssi elle vérifie les équations d'Euler Lagrange*

$$\tau(f)^\alpha = \Delta f^\alpha + g^{ij} \Gamma'^\alpha_{\beta\gamma}(f) f_i^\beta f_j^\gamma = 0 .$$

$\tau(f)$ est appelée la tension de f.

Une question classique du calcul global des variations est la suivante: toute classe d'homotopie d'applications de M dans M' contient-elle un représentant harmonique?

Pour les variétés sans bord, cette question s'est posée quand J. Eells et J.

Communicated by J. Eells, Jr., December 27, 1975. Aspirant au Fonds National Belge de la Recherche Scientifique. Université Libre de Bruxelles—University of Warwick.