J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
11 (1976) 573-598

PROBLEMES ISOPERIMETRIQUES ET ESPACES DE SOBOLEV

THIERRY AUBIN

Introduction

Dans une première section, nous poserons le problème: l'existence d'une meilleure constante K dans les inégalités de Sobolev. Cette constante, dont la valeur est mentionnée dans la première section, ne dépend que de la dimension de la variété et de l'espace L_q considéré.

Le Résultat principal est le théorème 9, qui permet de montrer, comme nous le ferons dans un article ultérieur, l'existence de solutions pour des équations différentielles non linéaires qui, jusqu'alors, étaient considérées comme cas limite.

Mais le résultat ultime serait celui de la conjecture 2 de la 5ème section. Cette conjecture est démontrée dans le cas des variétés à courbure constante, et dans le cas général en dimension 2. Le maillon qui manque en dimension $n \geq 3$ est la démonstration de la conjecture 1 (de la 2ème section).

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Dans la troisième section, nous démontrons le théorème pour R^n, théorème clé, qui permet de démontrer les autres.

Dans la quatrième section, nous démontrons le théorème pour la sphère. Mais au préalable, nous avons besoin d'établir des résultats isopérimétriques, ceux de la deuxième section. En particulier nous démontrons une inégalité isopérimétrique d'un type peu étudié jusqu'alors. Dans ce domaine habituellement, les ensembles considérés appartiennent à R^n ou plus rarement à une variété à courbure constante. Ici nous énonçons un résultat lorsque la courbure est quelconque; ce sera l'objet du théorème 6.

1. Le problème

Soient une variété riemannienne compacte V_n $(n > 1)$ et H_1^q $(1 \leq q < n)$ l'espace des fonctions appartenant à L_q ainsi que le module de leur gradient. On sait (Sobolev [12], Nirenberg [11]) que $H_1^q \subset L_p$ avec $1/p = 1/q - 1/n$ et que cette inclusion est continue.

D'où pour chaque variété, il existe des constantes B et A dépendant de n et q telles que

Communicated by A. Lichnerowicz, February 6, 1975.