J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
10 (1975) 61-84

SUR L'EXISTENCE D'IMMERSIONS ISOMETRIQUES LOCALES POUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

JACQUES GASQUI

Utilisant sa théorie des systèmes de Pfaff en involution, Elie Cartan démontre dans [1] que toute variété riemannienne analytique (X, g) de dimension n s'immerge isométriquement localement dans l'espace euclidien à $\frac{1}{2}n(n+1)$ dimensions ou, plus généralement, dans toute variété riemannienne analytique (Y, g') de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. Nous nous proposons de donner une nouvelle version de ce théorème dans le cadre de la théorie des équations différentielles non-linéaires de [4]. Nous montrons qu'une certaine équation différentielle non-linéaire d'ordre 2, $\tilde{R}_2$, construite sur un sous-fibré ouvert du fibré trivial $pr_1 : X \times Y \to X$, et dont les solutions sont des immersions isométriques de X dans Y, est formellement intégrable (théorème 5.1).

L'équation différentielle $f^*g' = g$, dont les solutions f de rang maximal sont des immersions isométriques de X dans Y, n'est pas formellement intégrable. En calculant l'obstruction au relèvement d'une solution formelle 2 de cette équation en une solution formelle d'ordre 3, on voit qu'il faut rajouter à ce système les équations de Gauss-Weingarten et de Gauss et l'on obtient ainsi le système d'équations différentielles d'ordre 2 considéré par Cartan [1]. A ce système, on rajoute des "inéquations" en imposant à la deuxième forme fondamentale des immersions considérées de vérifier une condition générique (cf. § 4) afin d'obtenir une équation différentielle $\tilde{R}_2$ d'ordre 2 (corollaire 4.3).

Si T désigne le fibré tangent à X, soit G le sous-fibré de $\otimes^4 T^*$, dont les sections sont les double 2-formes sur X. On note H le sous-fibré de $T^* \otimes G$ des éléments vérifiant la deuxième identité de Bianchi (définition 2.1) et W' le fibré image réciproque du fibré quotient $T^* \otimes G/H$ par la projection $\pi : \tilde{R}_2 \to X$. Nous commençons par établir que toute solution formelle d'ordre 2 de $\tilde{R}_2$ se relève en une solution formelle d'ordre 3 en construisant une section Ω de W' sur $\tilde{R}_2$ qui est l'obstruction au relèvement des solutions formelles d'ordre 2, et ensuite en montrant qu'elle est nulle (corollaire 5.2), ce qui est une conséquence de la deuxième identité de Bianchi. Nous prouvons, au passage, que W' s'identifie canoniquement au deuxième groupe de cohomologie de Spencer $H^{1,2}(g_2)$, où g_2 est le symbole de $\tilde{R}_2$. La condition imposée à la deuxième forme fondamentale des jets d'immersions nous permet de montrer que le symbole

Communicated by D. C. Spencer, October 23, 1973, and, in revised form, January 15, 1974.