J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
9 (1974) 41-54

SUR LES APPLICATIONS HARMONIQUES

JEAN-CLAUDE MITTEAU

1. Principaux résultats

Nous considérons deux variétés riemanniennes (M, g) et (M', g'); nous supposons *M compacte* et *(M', g') complète.* On pose $n = \dim M$. Variétés, métriques et connexions sont toujours supposées C^∞.

Soit $f \in C^1(M, M')$. On associe à f sa *densité d'énergie* $e(f) \in C^0(M)$

$$e(f)(p) = |Tf(p)|^2 ,$$

en coordonnées locales $e(f) = (g' \circ f)_{\alpha\beta}\partial_i f^\alpha \partial_j f^\beta g^{ij}$. *L'énergie* $E(f)$ est l'intégrale

$$E(f) = \int_M e(f)(p)dv(p) , \tag{1.1}$$

v étant la mesure canonique de volume de la variété (M, g). Un ensemble $K \subset C^1(M, M')$ est dit *C^1-borné* si Im (K) dans (M', g') et $\{e(f)(p) \mid f \in K, p \in M\}$ sont des ensembles bornés.

Considérons une classe d'homotopie $\mathscr{C}$ d'applications de M dans M'.

(1.2) Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un minimum absolu de l'énergie* (1.1) *dans $\mathscr{C}$ est: on peut trouver $K \subset C^1(M, M')$, K C^1-borné, tel que*

$$\operatorname*{Inf}_{f \in K} E(f) = \operatorname*{Inf}_{f \in \mathscr{C} \cap C^1(M, M')} E(f) .$$

On dit qu'une application $f \in C^1(M, M')$ est *harmonique* si f est un extremum de l'énergie (1.1). Si $f \in C^2(M, M')$, il est équivalent de dire que $\tau(f) = 0$, où τ est le champ de tensions de l'application f [1, chapitre 1, paragraphe 2A].

(1.3) Théorème. *Supposons (M', g') compacte. Il existe un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que si on peut trouver $f \in \mathscr{C} \cap C^1(M, M')$ vérifiant $e(f) \leq \varepsilon_1$, alors $\mathscr{C}$ contient au moins une application harmonique.*

Dans le cas où (M', g') est une variété à courbure sectionnelle non positive, on peut prendre $\varepsilon_1 = \infty$. Ce théorème est donc une généralisation du deuxième corollaire du théorème 11. A de [1].

(1.4) Théorème. *Supposons que (M, g) vérifie la propriété* (5.11). *Supposons que (M', g') ait une courbure sectionnelle majorée par $R \geq 0$. Il existe un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que si $f \in C^2(M, M')$ vérifie*

Communicated by A. Lichnerowicz, August 12, 1972.