

SUR L'ALGÈBRE DES AUTOMORPHISMES INFINITÉSIMAUX D'UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE

ANDRÉ AVEZ, ANDRÉ LICHNEROWICZ & A. DIAZ-MIRANDA

INTRODUCTION

On sait le rôle joué par les structures symplectiques en géométrie différentielle, comme en dynamique analytique (classique ou quantique). Nous nous proposons ici d'étudier la structure de l'algèbre de Lie L des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique (W, F) , algèbre de Lie à laquelle E. Calabi s'est récemment intéressé. On sait que L est de dimension infinie. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable, celle des vecteurs laissant invariante une forme élément de volume, l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact fournissent d'autres exemples naturels d'algèbres de Lie de dimension infinie. Ces algèbres ont fait récemment l'objet de travaux de Guelfand, Arnold et Rozenfeld dans le cas où la variété est compacte, de l'un d'entre nous sans cette hypothèse.

Les résultats principaux de ce travail apparaissent dans les parties III, IV et V. Dans un but de simplicité, on a regroupé dans les deux premières parties les notations, formules et rappels utilisés. L'un des principaux instruments est fourni par une généralisation d'un lemme de Calabi (§ 11).

La partie III porte principalement sur les algèbres de Lie admettant un produit scalaire invariant et on y établit des théorèmes de réductivité concernant certaines sous-algèbres de L . La partie IV est consacrée à l'étude des idéaux de l'algèbre de Lie L ou de certains de ces idéaux. On montre en particulier que tous ces idéaux sont semi-simples et de dimension infinie, mais qu'aucun idéal $\neq \{0\}$ n'admet un idéal supplémentaire.

La partie V est relative à la détermination complète des dérivations de l'algèbre de Lie L , de son idéal L^* correspondant aux 1-formes exactes et de l'algèbre de Lie N définie sur l'espace des fonctions C^∞ à valeurs réelles par la parenthèse de Poisson. On en déduit la cohomologie de ces algèbres de Lie en dimension 1. L'algèbre de Lie L^c des transformations infinitésimales conformes symplectiques joue ici un rôle essentiel. Si W est compacte, les dérivations de N ne sont pas toutes locales.