J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
8 (1973) 487-510

INVARIANTS CONFORMES GLOBAUX SUR LES VARIETES RIEMANNIENNES

JACQUELINE LELONG-FERRAND

Sur toute boule euclidienne ouverte B, il existe une métrique conformément équivalente à sa métrique initiale, et qui reste invariante dans tout automorphisme conforme de B; la distance géodésique associée est la distance hyperbolique. Dans le cas 2-dimensionnel, toute surface de Riemann hyperbolique simplement connexe possède la même propriété.

Dans cet article, nous montrons qu'il existe une classe très générale $(\mathscr{H}_0)$ de variétés riemanniennes M sur lesquelles on peut définir une distance δ_M entièrement déterminée par la structure conforme de M et par conséquent invariante dans tout automorphisme conforme de M. Mais il est des variétés sur lesquelles une telle distance ne peut exister: c'est le cas si M admet une suite d'automorphismes conformes convergeant vers une application constante; et c'est en particulier le cas de E_n. Si la variété M n'est pas de type $\mathscr{H}_0$ nous montrerons qu'il suffit de lui enlever un point si elle est non compacte, ou deux points si elle est compacte, pour obtenir une variété de type $\mathscr{H}_0$. A chaque triplet (x, y, z) de points d'une variété non compacte, et à chaque quadruplet (x, y, z, t) de points d'une variété compacte, nous pouvons ainsi associer des invariants conformes, entièrement déterminés par la structure conforme de la variété.

L'introduction de ces invariants permet de considérer les homéomorphismes quasi-conformes comme des applications bi-lipschitziennes. Elle permet aussi d'obtenir des renseignements sur le comportement des groupes d'automorphismes conformes d'une variété non compacte; et, dans le cas des variétés compactes, elle permettrait de donner une nouvelle démonstration de la conjecture de Lichnerowicz.

Les résultats obtenus aboutissent à une classification des variétés riemanniennes de dimension quelconque n; et pour $n = 2$, ils sont à rapprocher des classifications connues (cf. [8]).

La méthode utilisée est voisine de celle employée par G. D. Mostow dans [6]; elle est essentiellement fondée sur l'étude d'une classe de fonctions numériques vérifiant à la fois une hypothèse métrique (différentielle généralisée de puissance $n^{\text{ème}}$ sommable) et une hypothèse topologique (principe du

---

Communicated by J. Eells, Jr., June 28, 1972. Ces résultats ont fait l'objet d'un exposé à l'Université de Warwick (Juin 1972) et à Oberwohlfach (Juillet 1972).