J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
8 (1973) 125-134

COURBURE D'ORDRE p ET LES CLASSES DE PONTRJAGIN

ANN STEHNEY

Nous allons étudier d'après Thorpe la courbure d'ordre p (p-courbure) d'une variété riemannienne M. La 2-courbure est la courbure riemannienne ordinaire de M. La p-courbure ($p > 2$) est strictement plus faible que la 2-courbure, mais leurs interprétations géométriques sont semblables. Dans ce travail nous trouverons les classes caractéristiques de Pontrjagin de M par rapport aux tenseurs de p-courbure. Ceci nous permettra de donner des conditions locales sur la courbure qui entraînent la nullité de certaines classes de Pontrjagin de M. En particulier on obtient les résultats de Thorpe [7], Chern [1], Cheung et Hsiung [2], et Gray [3].

Si p est un entier pair, le tenseur riemannien de courbure d'ordre p (voir [8]) en un point $m \in M$ est une application linéaire auto-adjointe R_p de $\Lambda^p(M_m)$ donnée par

$$\begin{aligned}&\langle R_p(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p), v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p\rangle \\ (1) \qquad &= \frac{1}{2^{p/2}p!} \sum_{\alpha,\beta \in S_p} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)R(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, v_{\beta_1}, v_{\beta_2}) \cdots R(u_{\alpha_{p-1}}, u_{\alpha_p}, v_{\beta_{p-1}}, v_{\beta_p}) ,\end{aligned}$$

où $u_i, v_j \in M_m$, S_p est le groupe des permutations des entiers $(1, \cdots, p)$, $\varepsilon(\alpha)$ est la signature de α, et R est le tenseur (ordinaire) de courbure de M. Le théorème suivant nous donne les classes de Pontrjagin de M par rapport aux tenseurs R_p.

Théorème 4.1. *Soit M une variété riemannienne et R_{2k} son tenseur de courbure d'ordre $2k$. Alors*

$$\frac{[(2k)!]^2}{[2^k k!]^2(2\pi)^{2k}} \operatorname{Alt} R_{2k}{}^2$$

est une forme différentielle de M de degré $4k$ qui est fermée et qui représente $\mathscr{P}_k(M)$, la k^e classe de Pontrjagin de M.

Considérons un tenseur du type $R_p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p) = cAu_1 \wedge \cdots \wedge Au_p$, où $c \in \boldsymbol{R}$ et $A: M_m \to M_m$ est une application auto-adjointe. On notera $R_p = cA^p$. Nous avons le

Received October 13, 1971.