J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
7 (1972) 67-95

SUR LA STRUCTURE DES EQUATIONS DE LIE: II. EQUATIONS FORMELLEMENT TRANSITIVES

HUBERT GOLDSCHMIDT

3. Connexions dans le fibré tangent

Si E est un fibré vectoriel sur X, une dérivée covariante ∇ dans E est un opérateur différentiel

$$\nabla : \mathscr{E} \to \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$$

tel que

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \,, \qquad \text{pour } f \in \mathscr{O}_X,\ s \in \mathscr{E} \,.$$

On pose $\nabla_{\tilde{\xi}} s = \tilde{\xi} \barwedge \nabla s$, pour $\tilde{\xi} \in \mathscr{T}$, $s \in \mathscr{E}$ et on étend ∇ en une dérivation $\nabla : \wedge \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \to \wedge \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$ par la formule

$$\nabla(\alpha \wedge u) = d\alpha \wedge u + (-1)^p \alpha \wedge \nabla u$$

pour $\alpha \in \wedge^p \mathscr{T}^*$, $u \in \wedge \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$. On vérifie que

$$\langle \tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta}, \nabla u \rangle = \langle \tilde{\xi}, \nabla(\tilde{\eta} \barwedge u) \rangle - \langle \tilde{\eta}, \nabla(\tilde{\xi} \barwedge u) \rangle - \langle [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}], u \rangle \tag{3.1}$$

pour $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathscr{T}$, $u \in \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$.

L'application $\nabla^2 : \mathscr{E} \to \wedge^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$ est $\mathscr{O}_X$-linéaire et provient donc d'un morphisme K de fibrés vectoriels, la courbure de ∇, qui est donnée par la formule

$$\langle \tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta}, K \rangle = \nabla_{\tilde{\xi}} \nabla_{\tilde{\eta}} - \nabla_{\tilde{\eta}} \nabla_{\tilde{\xi}} - \nabla_{[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]}$$

pour $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathscr{T}$, Si la courbure de ∇ est nulle, on obtient un complexe

$$\mathscr{E} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\nabla} \wedge^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\nabla} \cdots \longrightarrow \wedge^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \longrightarrow 0$$

qui est exact d'après le lemme de Poincaré.

On dira qu'une section s de E est horizontale si $\nabla s = 0$, et qu'un repère $(s_1, \cdots, s_m)$ de E est horizontal si $\nabla s_i = 0$, pour $i = 1, \cdots, m$.

Proposition 3.1. *Soit ∇ une dérivée covariante sans courbure dans E. Pour*

Received June 25, 1971. Continuation of Part I, J. Differential Geometry **6** (1972) 357–373.