J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
6 (1972) 577-586

SUR LE CUT-LOCUS D'UNE VARIÉTÉ PLONGÉE

R. THOM

1. Préliminaire

Soit $C^r(M)$ l'espace des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^r$ sur une variété différentiable compacte M (muni de la topologie $\mathscr{C}^r$, $r > 0$).

On sait que cet espace fonctionnel est muni d'une *stratification canonique*, définie par exemple par les orbites du groupe $\operatorname{Diff} M \times \operatorname{Diff} \boldsymbol{R}$. Rappelons que jusqu'en codimension six, les orbites définissent une telle stratification; en codimension plus élevée apparaissent des modules, qui obligent à concentrer les orbites en strates (Voir J. N. Mather [2], F. Sergeraert [5]). Nous n'aurons ici à considérer explicitement que des strates de codimension inférieure à deux. On trouve dans J. Cerf [1] une description explicite de ces strates que nous rappelons ici brièvement: X^0, de codimension zéro, est l'ensemble des fonctions de Morse excellentes (à valeurs critiques toutes distinctes); X^1, de codimension un, est formée des fonctions dont deux seulement des valeurs critiques sont égales, ou qui admettent un seul point critique de type $f = x^3 +$ forme quadratique non dégénérée. X^2, strate de codimension deux, formée des fonctions dont trois valeurs critiques seulement sont égales, ou des fonctions dont un point critique d'index un a même valeur qu'un point critique ordinaire, ou des fonctions dont un point critique est de type $x^4 + \sum x_i^2$.

On observera que la partie lisse de l'ensemble X^1 (dit *ensemble de bifurcation* de $C^r(M)$) se décompose en certains ensembles $X_{i,j}$, ensemble des fonctions f qui admettent un point critique d'indice i et un point critique d'indice j d'égale valeur, les autres points critiques étant génériques. On appellera $X^m_{0,0}$ l'ensemble des fonctions qui admettent leur minimum absolu en deux points critiques simples distincts.

Définition. Le sous-ensemble fermé $W \subset C^r(M)$ tel que toute fonction g du complémentaire $C^r - W$ atteint son minimum absolu en un point critique ordinaire sera dit *l'ensemble de Maxwell* de l'espace fonctionnel. Ce complémentaire est évidemment partout dense dans $C^r(M)$.

Proposition 1. *L'ensemble W est l'adhérence de l'ensemble $X^m_{0,0}$.*

Une fonction $g \in W$ atteint son minimum absolu en deux points c_1, c_2 distincts au moins, ou en un minimum dégénéré unique. Dans le premier cas, on approchera g par une fonction f qui atteint son minimum absolu en deux points simples x_1, x_2 voisins de c_1, c_2 respectivement, donc dans $X^m_{0,0}$. Dans le second cas, le minimum, dans une carte locale, s'écrit $g = x_1^{2s} + h\,(x_2, \cdots, x_n)$, entier $s > 0$ et $\operatorname{dg} h \geq 2$.