J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
6 (1972) 357-373

SUR LA STRUCTURE DES EQUATIONS DE LIE: I. LE TROISIEME THEOREME FONDAMENTAL

HUBERT GOLDSCHMIDT

Dans [1], [2], Elie Cartan démontre le troisième théorème fondamental de la théorie des pseudogroupes de Lie, l'analogue du troisième théorème de Lie: "Toute algèbre de Lie de dimension finie sur $\boldsymbol{R}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie".

Nous donnons un énoncé du troisième théorème fondamental de Cartan dans le cadre de la nouvelle version ([9] et [10]) de la théorie des équations de Lie et des déformations de structures de Spencer ([15], [16] et [18]) élaborée par Malgrange et Spencer. D'autre part, la théorie des algèbres de Lie transitives de Guillemin-Sternberg [7] nous permet de formuler l'analogue exact du troisième théorème de Lie pour les pseudogroupes transitifs:

Toute algèbre de Lie transitive abstraite est isomorphe à l'algèbre de Lie transitive des solutions formelles en un point d'une équation de Lie analytique formellement intégrable et formellement transitive

qui découle du corollaire 6.1 et des résultats de Guillemin-Sternberg [7].

Cartan associe à tout pseudogroupe d'ordre 1 la famille d'algèbres de Lie des groupes d'isotropie linéaires et des fonctions de structure c_{ijk} qui vérifient deux équations qu'on appelle les équations de Cartan du pseudogroupe. Si le pseudogroupe est transitif, ces algèbres de Lie sont toutes isomorphes et les fonctions de structure sont des constantes; si le pseudogroupe provient d'un groupe de Lie, ces fonctions sont les constantes de structure du groupe. Si l'on se donne une algèbre de Lie involutive et des constantes c_{ijk} vérifiant les équations de Cartan, alors le troisième théorème fondamental de Cartan pour les pseudogroupes transitifs nous donne l'existence d'un pseudogroupe transitif analytique d'ordre 1 dont les constantes de structure sont les constantes données c_{ijk} et dont l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie linéaire est l'algèbre de Lie donnée.

Nous procédons comme Cartan et déterminons au § 1 d'abord les équations de Cartan d'une équation de Lie R'_k d'ordre k. Pour ce faire, nous sommes obligés de prendre une autre équation de Lie R_k d'ordre k et de supposer que R'_k est reliée à R_k par un automorphisme diagonal ϕ selon (1.3); on appellera R'_k l'équation R_k tordue par l'automorphisme ϕ. La première équation (1.1)

Received June 25, 1971. Due to its length this paper is being published in two parts; Part II will appear in the first issue of the next volume.