J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
5 (1971) 451-466

ÜBER DIE INTEGRATION VON DIFFERENTIALFORMEN MITTELS INTEGRALGEOMETRISCHER MASSE

KLAUS HORNEFFER

Einleitung

Die klassische Cauchy-Crofton-Formel drückt die Länge einer glatten Kurve in der Ebene durch das Integral über die Anzahl der Schnittpunkte mit Geraden aus. Allgemeiner läßt sich das Volumen V einer kompakten orientierten k-dimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit N des $\boldsymbol{R}^n$ folgendermaßen erhalten. Ist G die Mannigfaltigkeit orientierter $(n-k)$-dimensionaler Teilräume von $\boldsymbol{R}^n$ und μ ein passend normiertes invariantes Maß auf G, so ist

$$V = \int_G \Big(\sum_{p \in g \cap N} 1 \Big) \mu(dg) . \tag{1}$$

Diese Formel vom Croftonschen Typ läßt sich als Spezialfall einer anderen erhalten, die das Integral einer Differentialform k-ten Grades über N angibt. Ist T das positive normierte Feld tangentialer k-Vektoren von N, so ist

$$\int_N \omega = \int_G \Big(\sum_{p \in g \cap N} \langle T, \omega \rangle_p \Big) \mu(dg) . \tag{2}$$

Setzt man für die Differentialform ω das Volumenelement τ von N, so ergibt sich gerade (1). Die Bedeutung der Formel (2) liegt darin, daß als Integrationsbereich nicht mehr die möglicherweise komplizierte Mannigfaltigkeit N, sondern die ganz einfach gebaute Mannigfaltigkeit G auftritt. Eine ähnliche Formel, die auf Maak zurückgeht, steht im Mittelpunkt dieser Arbeit.

Man betrachte das Integral $\int_N d\omega$ über eine orientierte kompakte Untermannigfaltigkeit N mit orientiertem Rand ∂N. Die allgemeine Stokesformel liefert dann über die Formel (2) die Gleichheit der entsprechenden rechten Seiten, also eine Relation zweier integralgeometrischer Integrale. Man frage sich, ob es möglich ist, diese beiden Integrale direkt, also ohne Benutzung der Stokesformel ineinander überzuführen. Man würde dann einen integralgeomerischen Beweis der Stokesformel erhalten.

Communicated by W. P. A. Klingenberg October 21, 1970.